日本の教師

9 カリキュラムをつくる II 教室での試み

編集代表●稲垣忠彦・中野　光・寺﨑昌男
ぎょうせい

山岸昭則

教材を手でつくり・まなぶスタイルに創りかえる

■「数学教室」
■一九七六年（昭和五一）二七九号
■国土社

計算上のつまずきの分析からスタート

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根の公式の教科書展開は下〔左〕のようになっています。

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$$

$$x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

このままの代数の指導ではこれまでの経験から生徒は、「なぜこのように計算しなければならないか」「この計算をどのようにするか」という点で疑問をもちつづけたり、つまずいたりすることを知っています。生徒に覚えることを要求する前に、この疑問やつまずきを解決してやらなければなりません。

私の数学教育研究は、このように生徒の計算のつまずきの分析からスタートします。

研究のスタート台をここに据えるようになったのはごく最近のことで、それまでは教科教材論の研究からスタートし、授業では理念の教え込みになりがちでした。このまちがいを教えてくれたのは、説明による教え込みでは容易に理解してくれない現勤務校の高校生であり、小・中学校の仲間達の子どもの認識過程を最大限に尊重しようとする模擬授業の参観でした。

2次方程式の解法を例に、生徒の計算のつまずきからスタートして、数計算の水道方式の成果に学びながら研究する私の数学教育研究法を書いてみたいと思います。

代数計算で数計算の位取り原理、10進記数法に匹敵するものは何か

前記の教科書展開は、「若干の法則と記号に隷属させられていて……雑然としたわかりにくい術になっている」というデカルトの代数批判が時代を超えて有効だといえます。

私の当面の課題は、この現在の代数教育がおちいっている欠陥を、幾何で補おうということです。しかし、私の計画はデカルトの歩んだ解析幾何への道でなく、R・トムのカタストロフィー*理論に象徴される（と思っているのですが）数学的構造の空間的表現である〝シェーマ開発〟への道なのです。

＊カタストロフィー理論…連続的に状況を変化させたとき、突然に発生する不連続的現象を扱うための理論

少々大胆な計画かもしれませんが、数計算の水道方式*におけるタイルのように有効なシェーマを代数計算にも作りたい、という私の願望が、カタストロフィー理論の理念を都合よく解釈させました。つまり、複雑な現象を図形化し、一見してその現象の本質を見抜けるようにしようというカタストロフィー理論の方法が可能ならば、比較的単純な高校数学の教材のシェーマ化はかならずできると。

まず、代数計算において数計算の位取りの原理・10進記数法に匹敵するものは何か、と数計算の水道方式の成果に学びながら代数式の分析をします。そして位取りの原理に対して次数の法則を、また10進記数法に対してp進記数法を選びました。つぎに代数計算が数計算と同じはずがないという考えから代数学の特性を追求します。代数学が漸進的に仕上げられてきた跡を調べれば、計算の組織化と記号表現法の一般化された使用にあることがわかります。しかし、当面の課題にとってはもう一歩すすめ、それぞれの特性の基礎的あるいは本源的概念は何かをみきわめることこそ大切なことです。

基礎的あるいは本源的概念のシェーマ化

1元高次方程式という教材で、計算の組織化のポイントは〈定数係数を文字記号で表現する〉ことであり、記号表現法のポイントは〈記数法x^nとx^n（$n=0$, 1, 2……）が同種の量という理解〉であることと判断しました。

＊水道方式…一九五八年に教科書編集の過程で、遠山啓や銀林浩らによって生みだされた数計算指導の体系

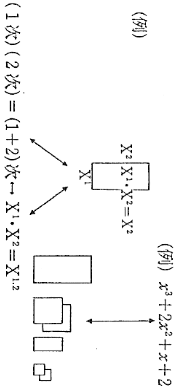
ギリシャの幾何学的代数そしてインドの代数を介したアラビア代数、ルネッサンス期の3次・4次方程式の幾何学的解法などは、代数計算をシェーマでという課題にとって重要な示唆を与えてくれます。しかしまた、幾何学的代数は幾何学の枠に代数をはめこんで計算の自由を奪う結果を招いたし、アラビアの代数はインドの代数で当然でてくるはずの負の根が求められないという結果を招いたことを考えると、これらが私の課題にとってそのままでは役立たないという判断もできます。

課題の焦点は、代数の計算力をそぐことなしに、代数計算の技法に直観的内容を与えるシェーマを開発することだといえます。

デカルトは、図形の中で最も簡単でわかりよいのは線分だとして代数の扱う量と直線の長さとの間に、また代数の計算と幾何の作図の間を合致させる幾何学を展開しました。

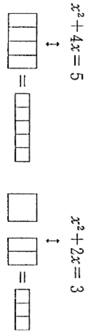
私は図形の中で最も簡単でわかりよいのは線分だろうか、幾何の作図は代数計算の技法に直観的内容を与え代数の計算力をそぐことのないシェーマとして最適だろうか、という疑問をもちつづけてきました。そして、数・文字・記号から構成される代数計算を物あるいは量に対する操作と対応させる以外にないと考えるにいたりました。

この観点から数学史を見直し、最終的に、デカルトが線分を単位に、x^nも同じ線分であるとしたのを、水槽に蓄積する水量をモデルに□という面積を単位に、x^nも同じく面積であるというベキ・タイルを考察したのです。〈記数法x^nとx^n（$n=0$，1，2……）が同種の量という理解〉はこのベキ・タイルによって実現できました。また、ベキ・タイルに次数の法則が内面化され、p進記数法に実体を与えることになりました。（次図）



つぎに代数にとって特に重要な〈定数係数を文字記号で表現する〉シェーマです。

数学史的にはヴェーター*です。ヴェーターは数係数方程式を解くのを一般的に考えるために、既知数を文字記号であらわしました。この工夫のおかげで、式や方程式の一般的構造やこれらを計算で変形してゆくときにあらわれる法則を見つけることができるようになったのです。この歴史を生かし、整方程式をベキ・タイルであらわすことから文字方程式をシェーマであらわすことを考えます。

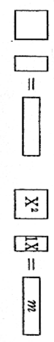


ベキ・タイルでは、分数係数になるとあらわすことができなくなります。実係数方程式をシェーマで表現することを考えましょう。

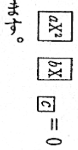
整係数方程式のベキ・タイル表現の共通な構造をシルエットであらわします。（次図上）

*F・ヴィエタ（一五四〇～一六〇三）。フランスの数学者。代数学の父と呼ばれる

このシルエットの幅は伸縮自在です。実数値 l、m を入れると実数係数の方程式のシェーマができます（前図下）。



一般の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ のシェーマ化も同様です（下図）。



これらはもはやベキ・タイルではありませんので、面積シェーマとよびます。

ギリシャ人は、量の大きさを線分であらわし、線分の関係として量の関係を一般化しましたが、この面積シェーマはこれにならったわけです。

このベキ・タイルと面積シェーマが、代数を担う数・文字の実体の役割を果たし、数・文字を機械的に演算する代数計算の技法に直観的内容を与えるのがベキ・タイル・面積シェーマの〝手の操作〟です。

計算の組織化

「この計算をどのようにするか」ということにベキ・タイル・面積シェーマが応えきれるかがつぎの課題です。

代数では数・文字を機械的に演算し、同型の問題を同一のアルゴリズム*で解くことができるようにすることが特徴です。数・文字を形式的に演算しアルゴリズムを発見すること、アルゴリズムで解くこと。この抽象的思考に習熟させることは数学教授、さらに教育全般の任務の一つといえます。

*アルゴリズム…計算の手順

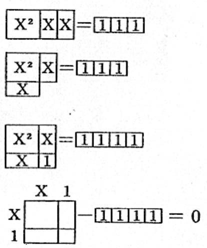
一般方程式の解法の発見にいたるには、未知数 x を含む数係数方程式の文字計算のひんぱんな使用があった。この歴史をシェーマを用いることによって一挙に圧縮させること。代数方程式の一般解法を獲得するには文字方程式を計算しなければならない。これをシェーマを用いることによって容易にすること。

この当面の課題を次のように実現します。

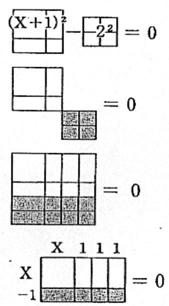
たとえば、

$$x^2+2x=3$$

を解く過程はベキ・タイルによって下図のように視覚化されます。

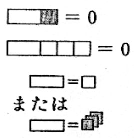


このような整係数方程式を、ベキ・タイルを実際に操作し、つぎにタイルを頭に思い浮かべながらタイル図で解き、最後に式操作という指導によって数係数方程式の解法の理解や形式的処理ができるように圧縮できます。

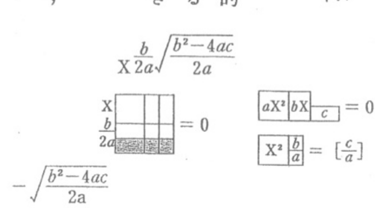


文字方程式の計算もシェーマ算と対応させると容易です。$x^2+lx=m$ の面積シェーマ操作から一般2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の面積シェーマ操作に移り、文字方程式の計算と対応させます。

シェーマ変容の過程は $x^2+lx=m$ からは整係数方程式のベキ・タイルの変容の過程と同じです。



最終的な面積シェーマは下図であり、この正方形の面積0より根の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を導くことができます。(この詳細については昨年の8月号参照。)



計算の意味づけ

つぎは「なぜこのように計算しなければならないか」ということです。数・文字の形式的演算の根拠だけではありません。ベキ・タイル操作、面積シェーマ操作の根拠はどこにあるのでしょう。これが明らかにならなければせっかくのシェーマ操作も「押しつけ」にならざるをえないのです。

これには量にまでさかのぼらなければなりません(事典を参照)。

私はこれを計算の量的意味づけといって、シェーマ操作による「この計算をどのようにするか」という計算の技術的意味づけと区別します。なぜなら、シェーマではその操作、数・文字の計算の根拠はわからないし、量的意味づけの量べったりでは数学的演算の習熟に必要なひんぱんな操作、操作の繰り返しが困難だからです。

手でつくり手で学ぶスタイルに構成する

これまで2次方程式の解法教材を研究した過程を素描してきました。つぎはどのように構成すれば学ぶ者に喜んで受けとめられるかということを考えながら授業の過程を明らかにする必要があります。

私の教えたいことを注入するのではなく、学ぶ者自らが考え、問題を提起し、解答を発見したかのように思わせる構成が必要なのです。(詳細は別の機会にゆずります)

手で操作する以外に構成しようのないほどに分解を徹底したシェーマ——ベキ・タイル——を総合して数学を学ぶ授業案で、手でつくり手で学ぶ数学のプランは一応完成します。しかし、このままでは仮説にすぎません。高校生や教師を生徒にした公開集会「楽しい数学教室」での集団討議を重ね、実践案が完成するというのが北数協*での経験であり、私の数学教育研究もここで一段落することになります。

〔一七〜三一ページ〕

*北数協…北陸地区数学教育協議会

解題

山岸昭則は、一九四一年(昭和一六)に大阪市で生まれた。車両会社に勤務した後、科学・技術の基礎としての数学・力学の重要性に着目し立命館大学理工学部に入学。土木工学科に学んでいたが、講師で来ていた数学者・森毅の数学講義にふれて、数学教師になることを決断し、数学物理学科に転科している。卒業後、石川県の普通科高校に赴任した山岸は、最先端の現代数学の成果を教える教育をすすめていたが、一九七四年に転任した松任農業高校では、教科内

容の現代化運動それ自体の反省と転換を迫られている。「手でつくり手で学ぶ数学」は、その新たな転換を象徴する呼び名であるといえよう。

「手でつくり手で学ぶ数学」の出発点は「子どものつまずき」であり、その「つまずき」の数学的理解であった。たとえば、代数計算の「つまずき」から、山岸は、ギリシャ数学以後の異次元の量の処理がもたらした量的意味の抽象化とデカルトの代数学以来の技術的意味（アルゴリズム）の抽象化の問題を読み取り、生徒の親しみとリアルな実感をともなった数学の世界の構築へと向かっている。「数学的活動」それ自体を学習活動とする授業の開発であり、それを可能にする教材と教具の開発である。学ぶ者の学ぶ活動と過程に即した教科教育の構成、このすぐれて現代的課題を彼の実践は、みごとに提起している。［佐藤］

注記：解説前段の私の履歴に一部間違いがあったので、「日本の教師」６巻（授業をつくるII　戦後）の拙稿解説前段の私の履歴の一部修正と併せて統一させていただいた。［山岸］