子どもにとってリアリティある学びを紡ぐために

～ 社会と結びつくアンテナを広げて ～

山岸　昭則

１．「人当てマジック」に遊ぶ　　　＊＊＊＊＊［A］

画用紙大の数枚の紙に数人の似顔絵（図１では上中下各３枚に４人）が貼ってある。顔は全部にあったり２枚や１枚だけにしかなかったりする。

シート１

シート２

シート３

図１　マジックのシート

（後の課題で自作するにはこの絵を３枚印刷する）

　マジシャン役の私が上のシート１～３の中の一人を覚えてもらい一枚一枚見せながら各シートにその人が居るか居ないか知らせてもらう。私はその情報だけから覚えた人を表の顔も見ないで素早く当てる。わずか３枚４人だから子どもたちの反応は「先生覚えているのでしょ」と冷ややか。すかさず私は４枚８人の顔でも覚えてもらい、応答から素早く当ててしまう。すると、４枚８人の場合まではとても覚えていられないと思った子どもたちは「エッ？！なんで分るの」、「不思議だ～？」という反応に変わる。５枚１６人でもそれ以上でも原理は同じでどの子がどの顔を覚えても必ず当てられる。

　以下、読者も他の人や子ども（以下、学び手）にこのマジックを再現できるように「人当てマジックの不思議」に潜む数理を解き明かし作ろう。

２．現実問題に対処できる数学力養成を提起したOECD／PISA

　２０００年からはじまったOECD／PISA調査『生きるための知識と技能』は、２００３年の報告が２００４年１２月に公表されるに及んで、「成績順位の下落傾

向が止まない」と報道・教育界は大騒ぎした。しかし、日本が注目すべきデータは成績の上下でなく、学校数学が数学への興味・関心・楽しみなどを摘み取りこうした情意面で日本の子どもたちが「際立って劣る」という国際診断が下されたこと。また、PISA報告で評価すべきは、「知識やスキルが現実問題に活用できる形で習得されているか、すぐ使える形で保持されているか、国の教育はそんな知識やスキルを育んできたか」という従来の知識量でない基準による「教育の基調の転換」を問題開発と評価の指標を添えて提示したことである。しかしこう高く評価するが賛同できない点もある。その代表が国に問いかける形で「そんな知識やスキルを育んできたか」と教師に問いかけている点である。そしてこの報告におけるPISAでは、「どう育むか」という点については問題開発と評価の指標提示という性格上、教師が問題解決を指導する上で準備できるプロセス提示で終えている。

本稿テーマ名にはこうした視点からPISAが世界の教育界に投げかけた基調、「問題解決能力の養成」に一定の批判を込め、「それをどう育むか」の一案として冒頭「人当てマジック」から開始する３節以降を提起した。

この課題の核心は、学び手に「問題解決」能力はいかに醸成されると考え、どのような手だてで実現するかにある。本稿では、学び手が解決すべき課題と直面し、持ち合わせの知識・経験を動員して深く考え結論づけるプロセスを体験させる。PISAは、開発した（熟考クラスター例の）「現実問題からスタート」させ、巧みに仕組んだ「解決プロセス」の回答分析でその能力を評価しようとする。学び手が直面した問題を解くのと、大人の作った与題を解く違いは、学び手にとってリアリティのレベルにおいて決定的に異なる。

冒頭マジックの不思議さ(sense of wonder)から始まる、はじめは誰にも数学とは思わさない不思議•発見の面白さ(sense of fun)は、幼児から大学生を含めた社会人までを同じスタート台に立たせ、探求させる。

３．変装タレントを探せ！

ある学び手がレストランで変装して来店していたタレントを見かけた。他の目撃した人たちからも次の情報が得られた。

・眼鏡をかけていた	・帽子をかぶっていた
・首に飾りをしていた	・ペットを連れていた

図 2

そのタレントは前頁の顔の中にいるという、それはどの顔の人だろうか？
（後の課題で自作するためにこの似顔絵を６枚印刷する）

３－1．分類して探す　＊＊＊＊＊［A－1］

最も簡単な方法は、顔をハサミでバラバラに切り離して、目撃情報に沿って集まりの分類を行い、該当者を見つけ出す方法である（バラした顔は後でも使用する）。なお紙幅の都合で、後から使う各顔の上に四つの○印のある用紙を掲載したが、この段階ではまだ○の付けていない似顔絵を渡す。

３－2．印をつけて見つける<情報化>　＊＊＊＊＊［A－2］

分類（仲間あつめ）の手法は小学入学頭初の算数教材である。しかし、残念ながら、これだけでは冒頭「人当てマジック」の「謎解き」は難しい。そこでもっと「根拠のはっきりした違った方法」で考えようということで、顔の上に書いてある四つの○に目撃情報に該当するかしないかの印をつける（いま流行りの言葉で言えば<情報化>という）。例えば、最上段左から３人目の人物は「帽子をかぶり」、「ペットを連れている」ので該当する○を●に塗り替えると、「○ ●

○ ●」となる。これにならって似顔絵全部に該当する○を●に塗り潰せ。（解は表１参照）
　果たして変装タレントにはどんな印が付くだろうか？

４．変装タレント探しを「数学する」

　○を「０」、●を「１」とすると、各顔は、１と０の４桁の数字で表現できる。○と●を書き込んだ似顔絵にこの４組の０と１も書き込め。
＊＊＊＊＊［A－3］

　表1は、絵も○も●も省略した数字だけのものである。

表 1

めがね	帽子	ネック	ベット	めがね	帽子	ネック	ベット	めがね	帽子	ネック	ベット	めがね	帽子	ネック	ベット
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1

４－1. ２進法(the binary system)と２進数 (a binary number)
＊＊＊＊＊［B-1］

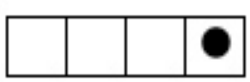
　４組の０と１で表現された数は4bitの２進数という。「もっと根拠のはっきりした方法」といったのは２進（記数）法を使おうというのである。
　人間は、日常多くのことを10進数で表現する10進法を用いるが、○を０、●を１で表わすように、

　　　　基本的な２つの状態または状況にあり得るもの

ならば何でも、本来的に２進数で表される。例えば電気回路のスイッチの「on/off」の説明で「オフ」の状態を表すのを数字０、「オン」の状態を表すのを数字１で表すことや、硬貨の表/裏、真偽を示す True/False の頭文字をとった T/F などあらゆることを０と１の２数を使って表わそうとするのが２進法である。

４－2. ２進数と10進数の相互変換　　　　＊＊＊＊＊［B－２］

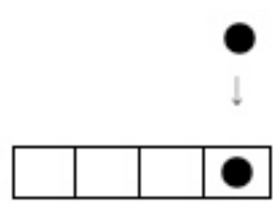
　２進法や２進数の概念、その計算の理解などに、次のような格子のマス目と○●タイルを用いるとイメージしやすい。○●タイルは太めの孔空けポンチで工作紙や空き箱などを打ち抜きその表裏を使う。
　４bitの２進数なら横一列４マス□□□□。２進数づくりや計算はそのマスの中にタイルを置いて行う。例えば、左上図、●のある位の桁を「１」、空欄の桁を「０」とすると２進数０００１である。
＊＊＊＊＊［B－３］



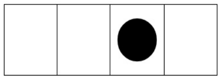
下の２ⁿは、２進数の位を表し、右から１位、２位、３位、４位。

　０　０　０　１
　2^3　2^2　2^1　2^0

右図のように１位にもう一つ●を加えれば、一マス内



に二つの●が入るので繰り上げ２位に●を置き


１位は空欄にして２進数００１０である（左図参照）。

10進数の「繰り上げ」と同じである。

こうして０　０　１　０　つぎに１●を加え、繰り上げを行うと次々に2進数が作られることになる。

この２進数を10進数に変換するには、２進数０１００を例にとれば

$0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0=0\times8+1\times4+0\times2+0\times1=4$

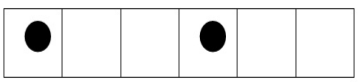
と計算すればいい。計算でなくても、２進数０１００の２位が１になったならば２進数０１１０。最初の２進数が１０進数４、これに２進数００１０つまり１０進数２が加わったので１０進数６と分る。

問題１　似顔絵の２進数を上記二つの方法で10進数に変換して書き込め。（解は７-1表２参照）

逆に、例えば、10進数３６を２進数に変換するには３６を2^nで表すことを考えれば、３６＝３２＋４より2^5+2^2であるから下図の６マスの格子で考えればいい。図で●のある位を「１」、空欄の位を「０」とすると、

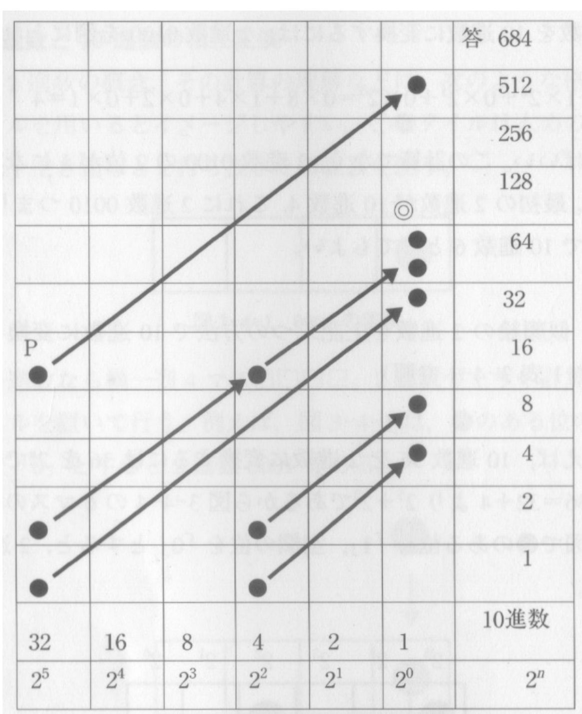
2^5　2^4　2^3　2^2　2^1　2^0　　2進数１　０　０　１　０　０と表される。

計算では次の通り。



$1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0=100100$

マス目を右図のように方眼状にすると2進数の四則計算をはじめ累乗、開平など様々な計算ができる。



２進法による掛け算図

例題　２進法による繰り上がりのあるかけ算　３６×１９

３６を２進数で表す場合行下端に●タイルを３２と４に置く、１９の２進数は縦に16と２と１の各行の３２と４の列の各交点にあたるマスに●タイルを置く。右端「$1=2^0$」列以外のところにある●タイルをすべて図３の矢線のように斜め右上に右端の「$1=2^0$」列に移動させる。すると６４の左マスには２つの●が入る。この時は上記２進法の繰り上げの原則から上のマスに繰り上げて（図３の◎）２つの●はなくし空欄にする。答えは「$1=2^0$」列の◎●タイルのあるマスを「１」、ないマスを「０」として下から書いて２進数１０１０１０１１００。これを１０進数で表すには、◎●タイルがあるマスの右欄の１０進数3,8,32,128,512を加えればよく６８４である。もちろん前頁で行った計算をしてもよい。

なぜ、斜めに移動すれば良いのかを（３２、１６）の交点Pで見ると

$$32 \times 16 = 2^5 \times 2^4$$
$$= 2^{5+4} = 2^9 = 512$$

つまり、移動先は指数法則に則っているのである。

演習　残りの斜め右上に移動する計算の指数法則の確かめを行え。

4-3.「人当てマジック」の数学的「謎解き」　****[C-1]

最後に、最初の“人当てマジック”の種明かしである。

本稿冒頭の３枚のシートの各顔には１と０の４桁の数字で表現した4bitの２進数と、これを10進数に変換した10進数の２つの数字情報が書き込めた。３枚のシートの各顔の裏に顔に合わせて該当する１０進数を書き込み、覚えた人がいると回答があった場合、各シートの裏面の最小数字（「赤」丸囲んでおく）をすべて加えた数が覚えた人でこれを即座に計算し当てる。

問題２　１枚目だけにない、３枚目だけにない場合夫々について計算せよ
（解は章末参照）

４－4.「人当てマジック」の不思議の種明かし　＊＊＊＊＊ [C-2]

この最小数を加えれば、なぜ覚えた顔の数字になるのかの不思議が、学び手の前に立ちはだかる当面の関心事果たしてその理由はなぜか？
この理由を明らかにするために、新しい冒頭のシート３枚に下表のように計算で顔の２進数と１０進数を書き込もう。まず、それぞれの最小数を２進数で表わして、１枚目の最小数 4　0100　（このシートは帽子をかぶった人の集合）

２枚目の最小数 2　0010　（このシートは首飾りをした人の集合）

３枚目の最小数 1　0001　（このシートはペットを連れた人の集合）

図 4

１枚目の数字（絵）		４、５、６、７	２進数４位が１の集合である
２枚目の数字（絵）		２、３、６、７	２進数２位が１の集合である
３枚目の数字（絵）		１、３、５、７	２進数１位が１の集合である
覚えてもらった数字が３枚ともあったと答えた	カードの最小数の計算	4 = 0100 2 = 0010 1 = 0001	２進数計算にすると 左の縦加算をすると 0111 つまり、答えは10進数７の顔の人
覚えてもらった数字が２枚めになかった	カードの最小数の計算	4 = 0100 1 = 0001	２進数計算にすると 左の縦加算をすると 0101 つまり、答えは10進数５の顔の人
覚えてもらった数字が３枚めだけあった	カードの最小数の計算	1 = 0001	２進数に直すと つまり、答えは10進数１の顔の人

　２進数の最小数同士を加えて（括弧内は10進数）、シートに書き込む。

右表のように最小数を加え合わせることによって、各シートすべての顔の数字が出来てしまう。そして共通な顔の数字になるのは、当該カードの最小数同士を加え合わせたもののみで、他の数字は、異なる顔カードを加えたときにできる数字である。

図　５

(A)１枚目の最小数自身 0100（4）、0100+0001=0101（5）
0100+0010=0110（6）、0100+0010+0001=0111（7）

(B)２枚目の最小数自身 0010（2）、0010+0001=0011（3）
0010+0100=0110（6）、0010+0100+0001=0111（7）

(C)３枚目の最小数自身 0001（1）、0001+0010=0011（3）
0001+0100=0101（5）、0001+0100+0010=0111（7）

＊＊＊＊ [D]

問題３　３枚４人の「人当てマジック」に倣って４枚８人のマジックができるシートを自作せよ。（解は章末参照）

５．人はいかにして難問に対処してきたか ～PISAの２つのプロセス～

　１７世紀以来、文学界には戯曲『サー・トマス・モアの本』は作者不明だがシェクスピアによるものかどうか？　が難問としてあった。この文学界の難題に終止符をうつのにコンピュータ駆使が熟した２０世紀後半まで待たねばならなかった。その経緯の概略が図６の流れ図で、左上Aからはじまる右回り（B,C,D）のプロセスであった。

図　６

当面する難問		合理的手法の創造		モデル世界
A戯曲『サー・トマス・モアの本』は作者不明だが、シェクスピアによるものかどうか？	⇒	コンピュータを駆 ⇒ 使した２０世後半	⇒	Bシェクスピアの三作品について41のチェック項目から彼の“文章の癖”(文紋)を採取。
↓				↓
				コンピュータ科学
↓				↓
Dシェクスピア作と断定。	⇦	⇦　⇦　解　釈	⇦	C『サー・トマス・モアの本』の文紋を抽出・照合。B,Cが符合。

　この難問解決におい決定的な役割を果したのはコンピュータ開発とその駆使であるが、それに劣らず「文紋」採取という手法の開発は重要である。なぜかというとこの手法はしかる後、日本でも紫式部の『源氏物語』や日蓮上人の著作物にも適用され、前者の５４巻中の後半１０巻は娘の作と認定、後者の真作は５０編中半分の２４編に過ぎないと判定するのに用いられたように、それ独自が有用な方法だからである(E)

「文紋」採取の手法の適用だけで難問の解決を図ったようなプロセスをPISAは（数学単独で解決できる）「数学化プロセス」といい、多くの人々がこの難問解決に多様に関ったであろう３世紀に渉る紆余曲折と、この上にコンピュータによって解決したアイディアの全体をPISAは、前者もその一部とする領域横断的「問題に対処するプロセス」としている。

６．『生きるための知識と技能』としての数学力を育むために

数学活動においてもこの２つのプロセスの存在を語った数理科学者は少なくない。科学教育にも提言の多いホワイトヘッドは『科学と近代世界』において次のように述べている(1981)。

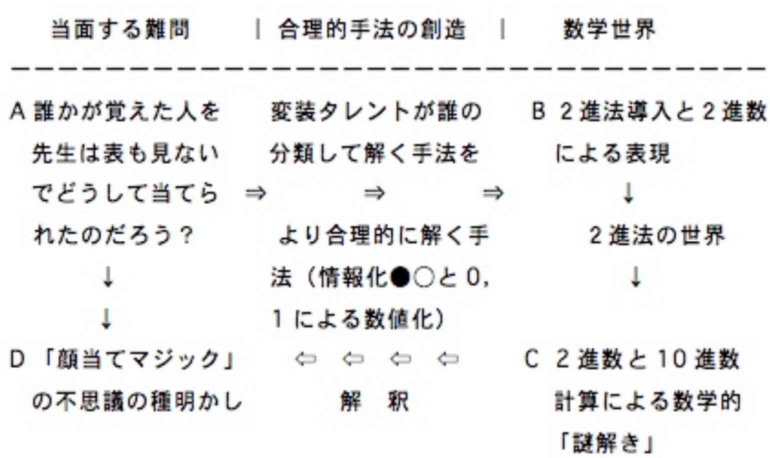
> 次第に抽象的思考の領域に入り込んでゆく様子はまことに印象的、数学はその上で、具体的事実の分析という重要な役割を果たすために地上に戻ってくる。・・・ここに、具体的なものを攻略するための武器が極度に抽象的であるという、パラドックスがある

しかし、この２つのプロセスを内容とした教材プランまでは数理科学者たちも詳しくは語らず、その実現は教師たちの努力に待つほかない。

第４節までの本文中にA～Dと書き込んであるのは第５節に史実を使ってPISAの「問題解決プロセス」を紹介したステップA～Dに対応する。同じ流れ図にしたのが図７であるが、第４節までの特徴は、「文紋」採取の方法を例にした「数学化プロセス」Eに対応するものがないことである。

それは第７節「紙製コンピュータを創る」全体が該当する。

図　7



7．紙製コンピュータを創る

何でも本来的に２進法が使える。そこで、２進用語的に身の回りを見渡すと思いもよぬところにそれらを見ることができる。

まず、自然が断続するリズムを作るときはいつも２進数を作る・・・

> 波、一陣の風、雲間から顔を覗かせる日光。

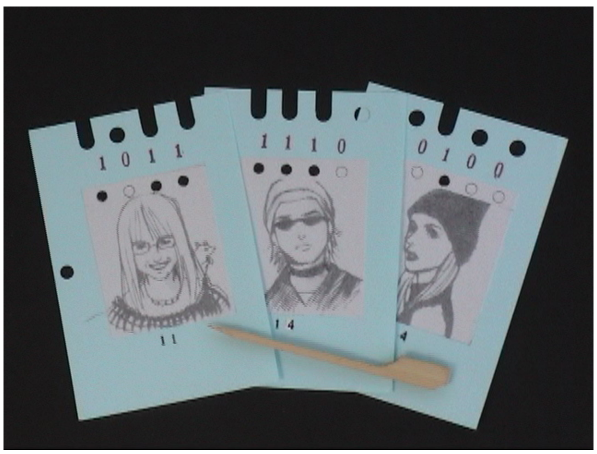
また、人間活動は意識的あるいは無意識的に２進数列を作る・・・

ラジオから流れるロック・ミュージックは、オフビート・リズム、それはトン～バン～トン～バンという、２進数101(実際には、0101だが２進数は0で始まらない)、ワルツはラ～ダ～ダと２進数100。
選択肢２肢のアンケート調査　etc.

人工的システムでもそうで・・・

急行電車の停まる駅を１として数え、停まらない駅を0として数えれば、これも２進数。灯台の灯の点/滅　etc.

7－１．２進（数）カード　　＊＊＊＊＊ [E]



上記の各種「基本的な２つの状態または状況にある」もののモデルとしてトランプのようにシャッフルできる腰のある厚手のカードを作り、孔空け器を利用してほぼ等間隔に孔を空ける。これを用いると、２進法の応用や２進数の計算そのアルゴリズムをこのカード操作で探ることができる。

図８

ここでは引き続き「人当てマジック」を用いる。一組１６枚のカードを作り、このカードに４つの◯の代わりに４つの孔をほぼ等間隔に空け、これに「人当てマジック」の3-1小節「分類して探す」で切り離した顔を貼付け●部分は上端かからＵ字状に切り欠く。
すべての顔と対応するカードを作って４bitの２進数とその10進数を書き入れたカードが例えば、
似顔絵２段目左２人目の顔ならばＵ◯ＵＵで１０進数１１（図８の写真左端参照）。
これを操作することで変装タレント探し（検索）や並べ替えができる。

表 2

カード	10進数	2進数	カード	10進数	2進数
◯◯◯◯	0	0000	U◯◯◯	8	1000
◯◯◯U	1	0001	U◯◯U	9	1001
◯◯U◯	2	0010	U◯U◯	10	1010
◯◯UU	3	0011	U◯UU	11	1011
◯U◯◯	4	0100	UU◯◯	12	1100
◯U◯U	5	0101	UU◯U	13	1101
◯UU◯	6	0110	UUU◯	14	1110
◯UUU	7	0111	UUUU	15	1111

７－２．カードで行う並べ替え（ソート）操作

＊＊＊＊＊ [Eー1]

仕上がったカードを並べ１０進数が連番でないように十分にシャッフルする。次に、爪楊枝

を一番目（目撃情報の第一“ペット”）の孔に差し込みカードをもう一方の手の上に篩い落とす。落ちたカードの上に爪楊枝に残っているカードを乗せ、爪楊枝を２番目の孔に差し込み同じ操作を行う。以下同様に３、４番目の孔に差し込み篩い落とす作業を繰り返す。
　最後に上から順番に番号を見ると０から１５の順に並んでいることになる。

　これはコンピュータ科学にいう昇順並び替え（ソート）である。

　このソートは子どもたちをして、「凄い？！順番に並んでいる」と感嘆の声をあげさせる不思議さからまた新たな探求心を生む。

７－３．カードで行う検索（サーチ）操作　　　　＊＊＊＊＊［Eー2］

　カードをシャッフルし、爪楊枝で目撃情報の第一であった“ペット”の孔に差し込みカードを篩い落とす。すると、ペットの所が切り欠かれていたカードが下に落ちる。変装タレントは落ちたカードの中にいることになるのでそれを取り上げ、爪楊枝を“ネック”の孔に差し込み篩い落とす。以下同様に第三、第四の孔に差し込んでは篩い落として行くと、最後に落ちたカードがお目当てのタレントである。

　これは、コンピュータ科学にいうデータの検索（サーチ）である。

７－４．ソートとサーチのアルゴリズム　　　　　＊＊＊＊＊［Eー3］

　昇順ソートの不思議の仕組み（アルゴリズム）は以下の通りである。
　カードをシャツフルして２進法でいう1の位2^0の孔に爪楊枝をさして上に引っ張る。そうすると１の位が切り欠かれていない○、つまり「0」のもの(10進数でいえば0,2,4,6,……の偶数)が混ざった状態で検索(サーチ)されたことになる。そして爪楊枝に残った偶数カードを元のカード（奇数）の上に置く（ここで偶数全体が奇数全体の上になった）。同様にして右から2つ目2^1の孔に爪楊枝をさして上に引っ張ると２進法でいう２の位が切り欠かれていない○、つまり「0」のもの(10進数でいえば0,1,4,5,8……)が（偶数が奇数の上にある）混ざった状態で爪楊枝に残る。そしてこの残ったカードを元のカードの上に置く（ここで1が2の上に来る）。以下同様にしていくと、０はすべてに引っ掛かり、１５はまったく引っ掛からないことから必然的に0のカードが一番上、１５のカードが一番下に来る。その他の大小隣り合わせの２数は、１と２で見たように小さい数が大きい数の上に並び替えられ、最終的には０から１５まで昇順に並べ替えられる。

　演習　昇順ソートの理由を理解した上で、１５～０の順番にカードが並ぶ
　　　　降順ソートの理由を書き、しかる後カードで行え。

　サーチとソートは、コンピュータの基本動作であり、こうした意味から、このカードは簡易コンピュータと言える。コンピュータが普及していなかった昔、カードによる検索と並べ替えは図書館や学校、会社で使われていた。

８．数学文化を問い直し、21世紀の早い時期に基調の転換を

　第２節において、「現実問題からスタート」させその「解決プロセス」を分析して問題解決能力を測るPISAの手法は、その問題も解決のプロセスも子どもたち

にとってリアリティあるものとは言い難く適切でない、と批判し問題解決能力を育むプロセスの試みとして本稿をスタートした。
「人当てマジック＆紙製コンピュータづくり」は、PISA２００３の遥か以前の１９５０年代、「エンジニアの卵」であった私が、当時の数学・力学教育に欠けていると痛感した「実際問題を数学化する」教育や「数学的アプローチがわからない諸現象に対処する」教育を体験させる教材の工夫のひとつとして１９９０年代後半から実践してきたものである。

８-1.　具体と抽象間を上り下りする数学思考の体験を

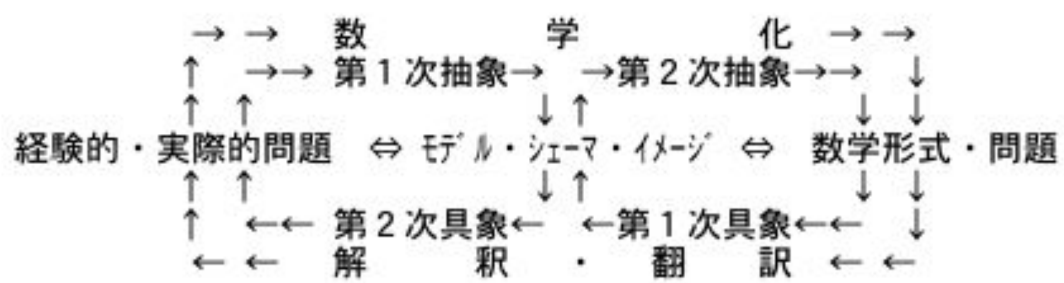
私が、PISAに先駆けて、「学んだ以外の現実問題に対処できる」教育や「数学活動の知的サイクルで構成する」学びなどを実践してきたのは、次のように要約できる数学（教育）観に立っていたからである。

学び手の日常的対象に、動作や行動を知的に適用し、数学の論理に導き、そうして獲得した、数学の諸形式を再び具体的事象の解析に適用する

お気づきのように、これは第６節に引用したホワイトヘッドの数学観の教育版である。教育版という意味は、ホワイトヘッドの「数学プロセス」は、人間の系統発生的な認識プロセスを指しているが、「教え＝学び」を主題とする教育においては、これに加えて個々の子どもの個体発生的な認識プロセスの教材化が欠かせない。
この２つを固く結合した教材構成の原理として私はスローガンで、

具体世界と抽象世界の階段を上り下りする数学思考を育む

と言い。これをもう少し詳しくした双方向ダイアグラムで教材を構成してきた。



これがPISAと符合したわけである。しかし、これは私の独創ではない。なぜなら、教育思想の歴史、例えば、ルソーやH.リードなどの「事物による教育」の系譜を知り、「構成主義的スパイラル方式」が提起した子どもの表象構造の発達変容三段階説のプロセスを知れば自ずと構想できることだか

運動的表象　⇒　映像的表象　⇒　記号的表象

らである。

本稿中のプロセス記号と対応させれば次のようになる。運動的表象による認識段階（A）にある子どもが、ある対象物を運動的表象によって認識した場合(A-1)、子どもが発達段階の経過とともに表象構造を変革しながら、同一の対象物を映像的表象(A-2，A-3)、さらには記号的表象によって認識(B-1~C-2)するならば、その認識はより明確でより精確なものとなる（D）。
こうしてブルーナーは「知的活動は、学問の最前線であろうと、３年生の教室であろうと、どこにおいても同じである」（『教育の過程』1961）と、科学的認識の思考・論理と学習者の学習・認識の論理の同一性という結論を導き、この二つの違いは「程度(degree)」の事柄であって「質(kind)」の問題ではないとした。

この方式は、その後、対話を重視する「社会的」構成主義と修正されたがここでは「双方向」に修正した。これはホワイトヘッドの数学観をはじめ諸「数学活動のサイクル」説を勘案すれば、プロセスEが位置づけられないその「単方向」性の限界はすぐ気付く。

８-3．学び手にとってリアリティある「知識とスキル」の教育を

数学リテラシー•科学リテラシーを重視するPISAをスタンダードにする国が増え、我が国でも頑な文科省も退潮著しい「読解力」を目の当りに方針転換をするなど徐々に影響が見える。しかしPISAを生かすにあたって昭和４２年の文部省版数学教育「現代化」の失敗の轍を踏んではならない。
本稿において、離散数学の一素材を例に、

> 学び手にとってリアリティある問題からスタートさせて、概念・手法を開発し、その手法で問題を解き、最初の問題を解決する。しかる後、別の異なる問題に解法を適用する

という一連のプロセスの実体験をしてもらったのは、未来の教師たちが、21世紀の早い時期に、「知識やスキルを現実問題に対処できる力を育む」方向に日本の教育の基調の転換を果す役割を担うにあたって視野に入れておくべきPISAの問題点と日本の数学教育の問題点への警鐘と対案提示であった。

１）PISAを「現代化」の失敗当時のSMSGのように科学の体系・系統として過信しないこと。「現代化」の失敗は、科学の体系・系統だけですべて解決すると、教科や教育内容の研究の積み重ねによる教育的咀嚼を軽視した拙速がもたらしたもの。既存の科学の見地だけで、あるいは数学の力量があれば数学教育は事足れりとする教科内容主義（仮称）の潮流はいまだ根強い。その一方、現代の数学が果たしている役割に見合った適切な「現代化」作業を怠り、旧態依然とした基礎・基本に固執する守旧的な数学教育もまた根強い。いずれの潮流もPISAを適切に評価しえない。例えば、PISAを高評価できる中に、ブルーナーのいう３年生よりは後にはなったが、１５歳青少年に自然・社会の現実問題を課し、解決プロセスを評価できるまでに問題開発したことが挙げられるが、従来の日本の学力論では大学教育まで受けなければ与えられない類いの問題という先入観があった。

2)本稿でPISAに不足していると思われる教育独自の取り組みを補う方向を示す一方、我が国の数学教育界にある潮流の下、現代の数学が果たしている役割に見合った教えるべき基本（現代的な数学概念・方法）を明らかにし、その教育を短い期間に達成する子ど

もにとってリアリティある「教え＝学び」のプロセス確立という新たな「現代化」作業を行う必要を呼びかけた。この作業を疎かにした現在の数学教育の継続ではPISAも画餅に終わる。これは各国の現行カリキュラムを不問に、「知識とスキルを現実問題に適用する」ことだけに興味があるとするPISAのもうひとつの問題点でもある。

3)子どもたちにとってリアリティある問題開発とは、生の自然・社会の問題だけでなく、子どもたちの生活・文化を尊重した問題開発を意味する。

＜問題の略解＞

問題２　１枚目だけにないとは２、３枚目にあるという意。覚えてもらった顔は各最小数の和２＋１＝３　よって３の顔の人。同様に、３枚目だけにないとは１、２枚目にあること。従って４＋２＝６の顔の人。

問題３　４枚８人の「人当てマジック」シート４枚の自作。
ペットと人の集合 {1,3,5,7,9,11,13,15}
ネック飾りの人の集合 {2,3,6,7,10,11,14,15}
帽子の人の集合 {4,5,6,7,12,13,14,15}
眼鏡の人の集合 {8,9,10,11,12,13,14,15}

８通りに分けられたそれぞれの場合

1枚目の情報	シートの最小	2枚目の情報	3枚目の情報	計算結果
帽子をかぶっているか？	帽子をかぶっていれば、その最小は、４	さらに、首飾りをしていると、＋２	また、ペットをつれていると、＋１	結局、4+2+1=7 (0111)
			ペットを連れていないと、そのまま	結局、 4+2+0=6 (0110)
		首飾りをしていないと、そのまま	ペットをつれていると、＋１	結局、 4+0+1-5 (0101)
			ペットを連れていないと、そのまま	結局, 4+0+0=4 (0100)
	かぶっていなければ、そのシートの最小４は足さない	首飾りをしていると＋２	ペットをつれていると、＋１	結局, 0+2+1=3 (0011)
			ペットを連れていないとそのまま	結局、0+2+0=2 (0010)

		首飾りをしていないと、そのまま	ペットをつれていると、 ＋１	結局、3枚目の最小だけで,1
			ペットを連れていないとそのまま	結局何も足さないから. 0