

私を変えたベキタイル

小島和美(石川)

数学教育協議会の全国大会, 北陸数教協の研究, 金沢サークル, 折り紙教育を考える会の研究会に参加しているが, 現場から離れ2年が経過。子どもを変えることは私が楽しくなる授業・教材研究をし、私自身の授業が変わることだと考えた。山岸昭則さんが考案した『ベキタイル』、堀井洋子さんから影響を受けた『折り紙』、浅野芳夫さん(故人)の教育観・教材感が私の授業を変えるきっかけになった。3人との出会いは教師になって2~3年目だった。全国大会などにもできるだけ参加し、教材研究に夢中になって取り組んできた。子どもと一緒に授業する楽しさと喜びを私に与えてくれるきっかけを作ってくれた。教材研究は時間がかかったがそれ以上に子どもたちと一緒に授業をしているという感じを与えてくれた。今回は『ベキタイル』について書くことにした。子どもの感想を一つ、

“私ら、小学3年生とちがうんだぞ”「工作用紙をきって」という先生を恨んだ。もんくを言いながらもタイルのできあがり。「 $2x^2 - 4x - 3 - (2x + 5) = ?$ 」をやりなさい」と言われ、「こんなもの頭の中で…」、答はみごとに違い、タイルを見直したものだった。今までわからない問題はやめておくか、隣に聞いたりしていたが、タイルさえあれば、答えは出てくる。答よりも、もっと大切なこと、基本・何故こうなるのかということがよくわかった。これまでは式の「かたち」だけしかわからなかったが、タイルを使うことで、基本・経過・結果がよくわかった。これを利用し、応用問題にすすめば、より力を確かにできるのではないだろうか。このようにタイルはかたちだけだった私に計算の理由をプラスしてくれる結果となった。

1. ベキタイルを授業に取り入れた理由

- * 中学校数学教育の重要な柱の1つに文字式がある。
- * 文字式が小学校から中学校数学への大きな飛躍の原因である。
- * 文字式という抽象的概念を子どもたちにどのように獲得させていくか。これは困難な課題だが、教師が追求すべきことだ。
- * 子どもの躓き、疑問の分析に重点を置き、この躓き、疑問を少しでも解決するための教材・教具の開発が重要だ。(これにあったシェーマとして山岸昭則さんはベキタイルの考案をしたのだと思う。)
- * ベキタイルは、子どもが身近につくったり、遊んだり、並べたりできるもので、操作してみたくなるものだ。
- * 子どもの躓き
 - ☆ $3x - 3 = x$, $3x + 2 = 5x$, $2x + 3x = 5x^2$, $x^2 + 3x^2 = 3x^4$ などの躓きをベキタイル操作で少なくなる。
 - ☆ ベキタイルを中学3年生の多項式の展開・因数分解・2次方程式の平方完成のところで取り入れた。
 - ☆ ベキタイル操作をすることで、計算規則を子ども自ら発見しパズルのようなおもしろさを感じ知的好奇心を持ち、子どもは能動的な状態で授業に取り組むことになった。
 - ☆ $x^2 + 2x - 3$ の因数分解はこのままでは長方形はできないからベキタイルで遊ぶことの限界だとし、負のタイルを使用しない方向をとるのではなく、数概念の拡張と同じように積極的に負のタイルも使用する方向をとった。キャンセル

ルタイル ($-x$ と x の組み合わせ) を何組か加える。このことが、ベキタイルを使うおもしろさや有効性がある。正負の数のキャンセルタイルや0ワールドにも関連している。東京書籍の教科書にも最近ではタイルが取り入れられているが、負のタイルは使用していない。

＊ベキタイル操作の段階は整数係数の場合→面積図操作の段階→直積表操作の段階を通し、必要に応じて、数・文字・記号で構成された抽象的な数学概念形成に結びつく。

2. ベキタイルを使う

中学校では 1 , x , x^2 の3種類のタイルを作る。

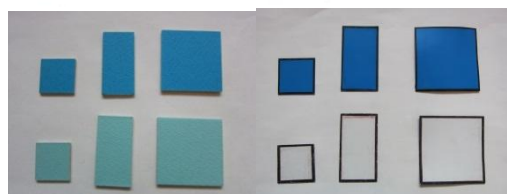
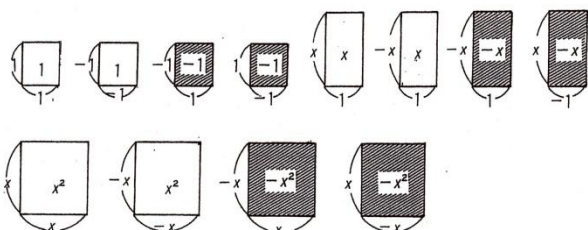
厚紙(暑さ 5mm ぐらいがよい。工作用紙でもよい)タイルはすべて表裏の区別をしておく。

裏は1辺が負で面積が負のタイルを意味している。

教師用はマグシートで寸法も少し大きく作る。

タイル	寸法 (cm)	枚数
x^2	4.5×4.5	15 枚
x	2.5×4.5	20 枚
1	2.5×2.5	20 枚

1 , x , x^2 または -1 , $-x$, $-x^2$ のタイルの縦と横の関係はつぎのようになる。



生徒用(厚紙)

教師用(マグシート)

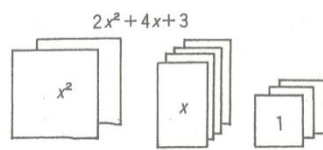
ベキタイルは多項式代数を担う数・文字のモデルだから、多項式の概念作り, 多項式計算の技術(方法)に意味を与えることになる。量のもつ乗除的側面を体感できる適切なシェーマとしてあり、くっつけたり切り離したりすることで加減も体感できる、手で学ぶことができるものである。

T: x^2 タイル 2 枚, x タイル 4 枚, 1 タイル 3 枚を合わせるとどうなるでしょうか。机の上に並べ、式でも表してください。

(子どもたちは机の上にタイルを並べ、式も書いた。)

タイルで表す

$$\text{式 } 2x^2 + 4x + 3$$



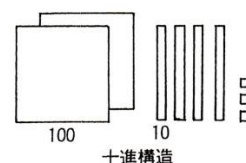
T: 小学生のとき、243

という数をタイルを使って表したり、十進構造で表したことはありませんか。

S: 知らない

(小学校のときにタイル操作の経験がない子どもたちばかりだった。)

$$243 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 1 \quad \text{タイルで表す。}$$



10 のベキ(累乗)が1つの構造になっている上の多項式のタイル表示と似ている。 x の倍の繰り返しベキ構造になっている。(ベキタイル)

T: 小学校のとき、 $232+131$ の計算をするとき、どのように計算した?

S: 筆算でしたよ。

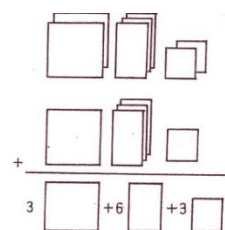
T: 多項式の加方も同じようにできないかな。

$$(2x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 3x + 1)$$

を計算してください。

子どもたちはタイルを並べて同じ種類のタイルを合わせた。タイル操作

式操作



$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 1 \\ + x^2 + 3x + 1 \\ \hline 3x^2 + 6x + 2 \end{array}$$

＊減法について、正負の数の加減をタイル操作でキャンセルタイルなどを利用し、引く方の符号を変えて加法にすることを学習したことを思い出し多項式の減法について学習した。

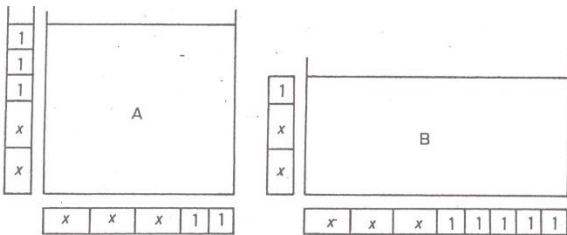
3. 多項式の乗法

T：奥行き1の2つの水槽A, Bに水が入っている。

どちらの水が多いかを調べるために水槽の横の長さ
と深さを測ったら下図のようだった。

A, Bの水量を求め、どちらがどれだけ多いか。ベ
キタイルを並べて考えよう。

(準備；工作用紙で奥行き1の水槽を作り、粋呂婦
画、正面のちいおうほうけいの面積になることを
確認。ベキタイルの実物大の水槽図の正面を印刷
したものを子どもの数を用意)

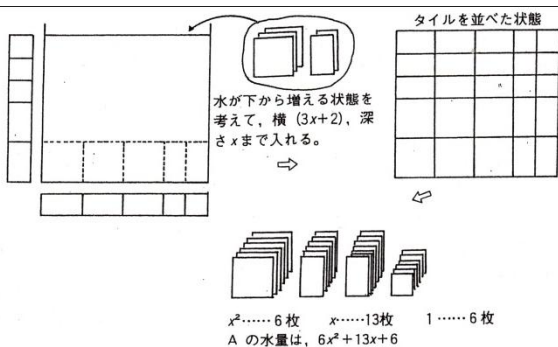


S：体積は縦×横×奥行きから式で表せるよ。

$$\begin{aligned} A & (2x+3) \times (3x+2) \times 1 = (2x+3)(3x+2) \\ B & (2x+1) \times (3x+5) \times 1 = (2x+1)(3x+5) \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

T：この形だと水量比べられないからベキタイルを
水槽に入れてみよう。

子どもたちはベキタイルを並べる。



ベキタイルからA, Bの水量を求める。

$$\begin{aligned} A & x^2 \cdots 6 \text{ 枚}, x \cdots 13 \text{ 枚}, 1 \cdots 6 \text{ 枚} \\ & 6x^2 + 13x + 6 \\ B & x^2 \cdots 6 \text{ 枚}, x \cdots 13 \text{ 枚}, 1 \cdots 5 \text{ 枚} \\ & 6x^2 + 13x + 5 \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

②から比べるとAの方が1多いことがわかる。

T：①の乗法の形では比べられなかったが、②の形
にしたら比べることができた。

(多項式) × (多項式)
積の形



多項式(単項式の和)
和の形

展開

ベキタイルを水槽図に並べるとき思った以上に子ども
たちは試行錯誤した。その後、子どもたちに

印刷した紙を配り、その上でベキタイル
を並べることをした。

T：次の式をベキタイルを使って展開しよう。

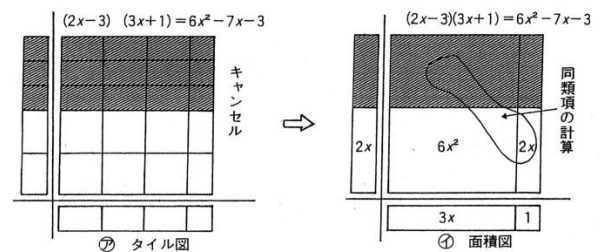
$$\begin{aligned} \textcircled{1} & (x+3)(3x+2) & \textcircled{2} & (x-2)(3x-2) \\ \textcircled{3} & (x+2)(3x-1) \end{aligned}$$

(x の項のキャンセルがある・無しを考慮して出題)

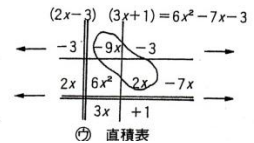
子どもたちはタイル操作をしながら答を出す。タイル
が無かったらどうするの? という声が出てくる。

そこで、タイル図(面積化)する。そのうちまたタイル
書くのが面倒だから表にしたらいいよという声。
これを直積表と名付け採用していくことにした。

($2x-3)(3x+1)$ を例として



⑦よりも④の方が楽だといって④の方
をかく生徒が出てくる(面積図の誕生)。
これよりも、もっと簡略化して⑦のよう
な表を書く(直積表と名付ける)。



タイル操作による乗法は特殊な数係数な場合、そこ
からタイル図・面積図・直積表にとシェーマの移行。

教科書に載っている分配法則を使った方法の説明。

タイル操作 $\leftrightarrow$ タイル図(面積図) $\leftrightarrow$ 直積表

直積表

筆算方法

分配法則

$$\begin{array}{r} +2 \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ 3x \quad 6x^2 \quad +15x \\ \hline 6x^2 + 15x + 6x + 12 \\ \hline 6x^2 + 21x + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x-5 \\ \times 3x+2 \\ \hline 6x^2-15x \\ 4x-10 \\ \hline 6x^2-11x-10 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & (3x+2)(2x-5) \\ & = 6x^2 - 15x + 4x - 10 \\ & = 6x^2 - 11x - 10 \end{aligned}$$

子どもたちは問題に応じて3つの方法を使った。公
式についても学習する。子どもたちに公式を忘れた
ら戻る基本があれば安心という気持ちを待たせたい。

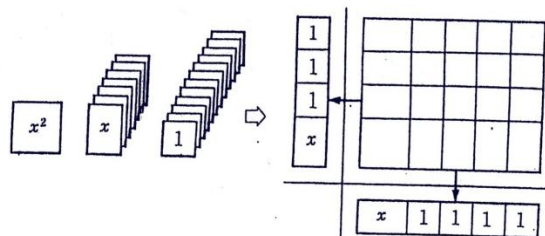
速さを競うものではなく、問題に直面したとき自分で解決できる力をつけることが必要。

4. 因数分解

多項式の展開の逆操作として因数分解を学習した。

T: x^2 タイル1枚, x タイル7枚, 1 タイル12枚を

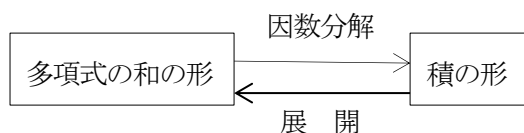
合わせるとどうなるか。また、これらすべて使って長方形を作り、2辺の長さを求めよう。



左の $x^2 + 7x + 12$ のベキタイルから上のような長方形を作る。日頃、計算が苦手な子が速く長方形を作る場合が多かった。

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

積の形にすることを因数分解という。



T: タイルを使って次の2次式を因数分解しよう。

- ① $x^2 + 7x + 6$ ② $x^2 + 4x + 4$
③ $x^2 - 11x + 10$ ④ $x^2 + 2x - 3$

①②③までは順調にタイルを並べるが、④のときに、子どもから「長方形作れん!」と言い出す。

T: 因数分解は展開の逆だったね。展開のとき x タイルをキャンセルして無くしたことをちょっと思い出してみよう。また、①②③のときどこから並べたら速く長方形になったかも考えて。

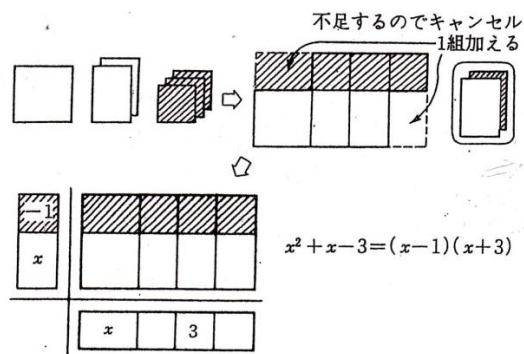
C	D
A	B

A...2次の項

D...定数項

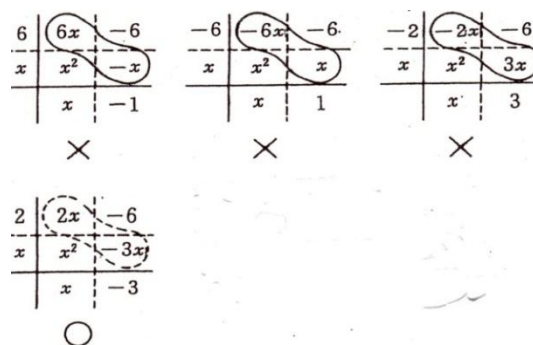
Aの2次の項をまず並べ、
Dの定数項をならべる。そ

れからCとBに x タイルを残さず並べる。このように考えると④の場合はどうなるだろうか。



$x^2 - x - 6$ を直積表で因数分解しよう。

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$



定数項の分解の方法をあらゆる場合を考え、

x の1次の項の和が与えられた式の x の1次の項と一致するかどうか試行錯誤で探す。これはたすき掛けと同じだ。因数分解も公式に頼らず、直積表を利用すればよい。公式について授業で取り上げたが、あまり重点を置かなかった。

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$$

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$

この2つの場合タイルを並べると正方形になることを確認した。

5. 最後に

紙面の関係でタイルづくり、2次方程式の平方完成でのベキタイル操作とタイル図操作のことについて省略した。

浅野芳夫さん(故人)が話していたことを思い出した。“授業を通して子どもが目を開く、子どもの前に開かれた新しい世界に感動する、その感動の中で子どもが身につけていくものが大切だ。” 私は子どもと一緒に感動できる場面をどれだけ作ることができたのだろうか。子どもとの授業を38年間もできて幸せだった。