

数学教育全国研究会資料

PISA（国際生徒アセスメントプログラム）問題解決能力

積極面 & 問題点と対策

そして

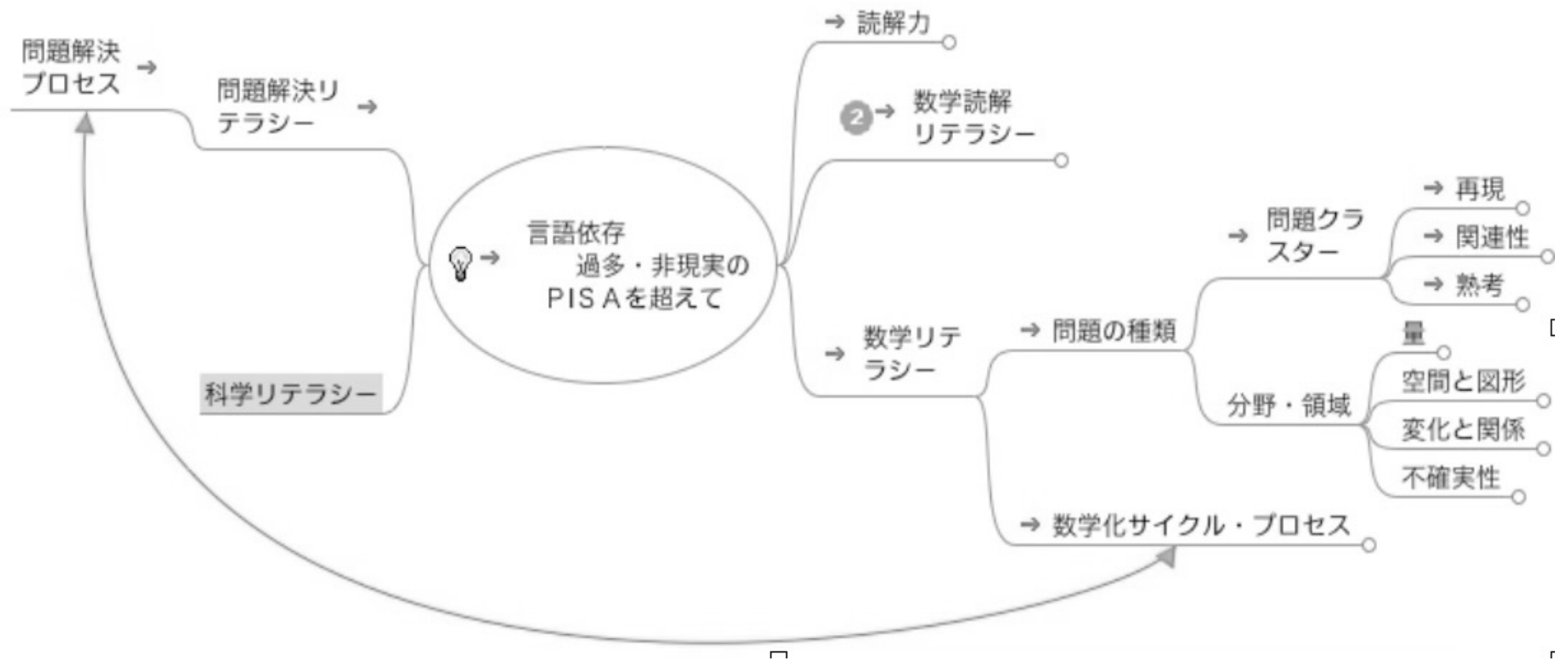
2つのプロセス

’06.2(初版) ’25.4(改訂)

山 岸 昭 則

(石 川)

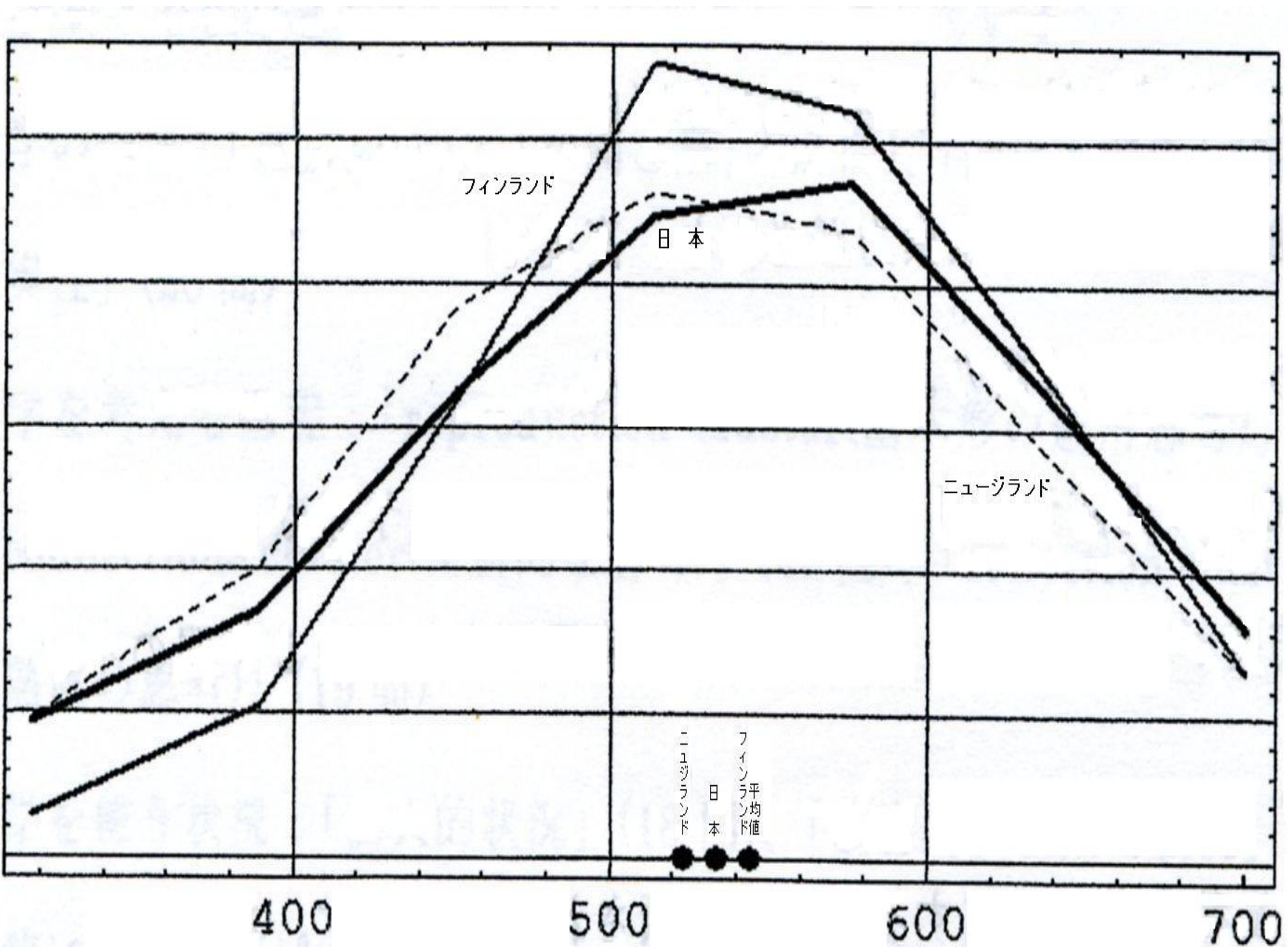
「知識と技術」構想で数理リテラシーを鳥瞰する



ス ラ イ ド 目 次

- 1) 「問題解決能力」と数理リテラシー
- 2) 「PISAを超える」数理リテラシーを
- 3) 「問題解決能力」調査の積極面
- 4) 「問題解決能力」調査の問題点と対策
- 5) 難問解決をモデルを工夫して解く人間
- 6) モデル（シミュレータ）のいろいろ
- 7) モデル世界が数学世界の場合
- 8) 2つの問題解決プロセス 1
～ 教科横断的プロセス ～
- 9) 2つの問題解決プロセス 2
～ 数学化プロセス ～
- 10) 数学化サイクル・プロセス
- 11) 数学化プロセスと教科横断的プロセス
の比較
- 12) 数学問題は解くより創るのが難しい
- 13) 具体と抽象の階段を上り下り する思
考の教育を
- 14) 読解力と2つのプロセスの関係
- 15) PISAに反映されている諸論
状況に埋め込まれた学習
— 正当的周辺参加 —
- 16) PISAに反映されている諸論
状況に埋め込まれた学習
— その数学学習論 —
- 17) 「現実問題からスタート」させ
ると言うけれど
- 18) 学び手にとって「現実問題から
スタート」とは
- 19) 「落ちる紙幣はなぜ掴めない」
から「モンキーハンティング」
まで
- 20) 新聞記事

PISA調査グラフで見る全般的特長('06.2現在)



1. 「問題解決能力」 調査の積極面

(1) 最も重要なことは、カリキュラムに準拠していないで学問領域を超える（領域横断もしくは教科横断）、包括的な問題解決能力及び推論技能に重点を置いている。

したがって

(2) 各国の教育比較を、従来の知識量でなく「問題解決スキル」をつけているかで測った。それは、中等教育教材で実生活上の問題を解決させようとし、このことは「学校で習うことは役に立たない」としてきた社会風潮を打破する。（新聞記事参照）

また、

(3) 「基礎・基本を欠いては・・・」という知識量を尺度とすることから抜け切れない学力観に対し、様々な知識や理解や技能は問題解決能力をつけてこそ意味があることを明らかにする一方、問題解決アプローチには知識量の多寡に関係なく思考できるプロセスのあることを明らかにし、測定可能にしようとした。

(4) 「教えられたことをテストされる」という先入見と、「教えられていないことをテストするのはアンフェア」という異議の両方に、実生活では所与の場面で学んだあるいは何を用いて判断するかは、個々の人それぞれの責任とし、その判断能力を育むことこそが子どもたちに「世界の扉」を開かせるとした。

2. 「問題解決能力」調査の問題点と対策

(1) 「問題解決スキル」習得は学び手の興味・関心と大きく関わる。PISAのいう「現実問題からスタート」も、所詮は教育用に作られた虚構からのスタートに過ぎず、こうしたものによって解決能力を測ろうとすることしかできないPISAもまた限界はある。

(2) 学び手が実生活で直面し、解決しようとするときこそ真の「現実問題からスタート」になるが、それを教育場面で実現するには教育特有の場面設定（動議づけ）を要する（スライド16参照）。

例えば、学び手に

落ちる一万円札はなぜ掴めない

という体験をさせると2乗比例（落体の法則）は彼らにとって極めてリアリティある興味関心事となり、それに続く、「読解力」の駆使と一連の「問題解決」「数学化」両プロセスを経る模索を教えることができる。この一連の模索は現在のところ「総合的な学習の時間」をおいてない。

こうした模索を通じて創造性、創成能力が醸成されるのだが、そのプロセスなり技法の指導過程についてPISAは、「関連のあるプロセスを理解することはまた、教師が問題解決を指導する上で教育活動を準備できるようにする」（『評価の枠組み』p155）という程度に止まっている。

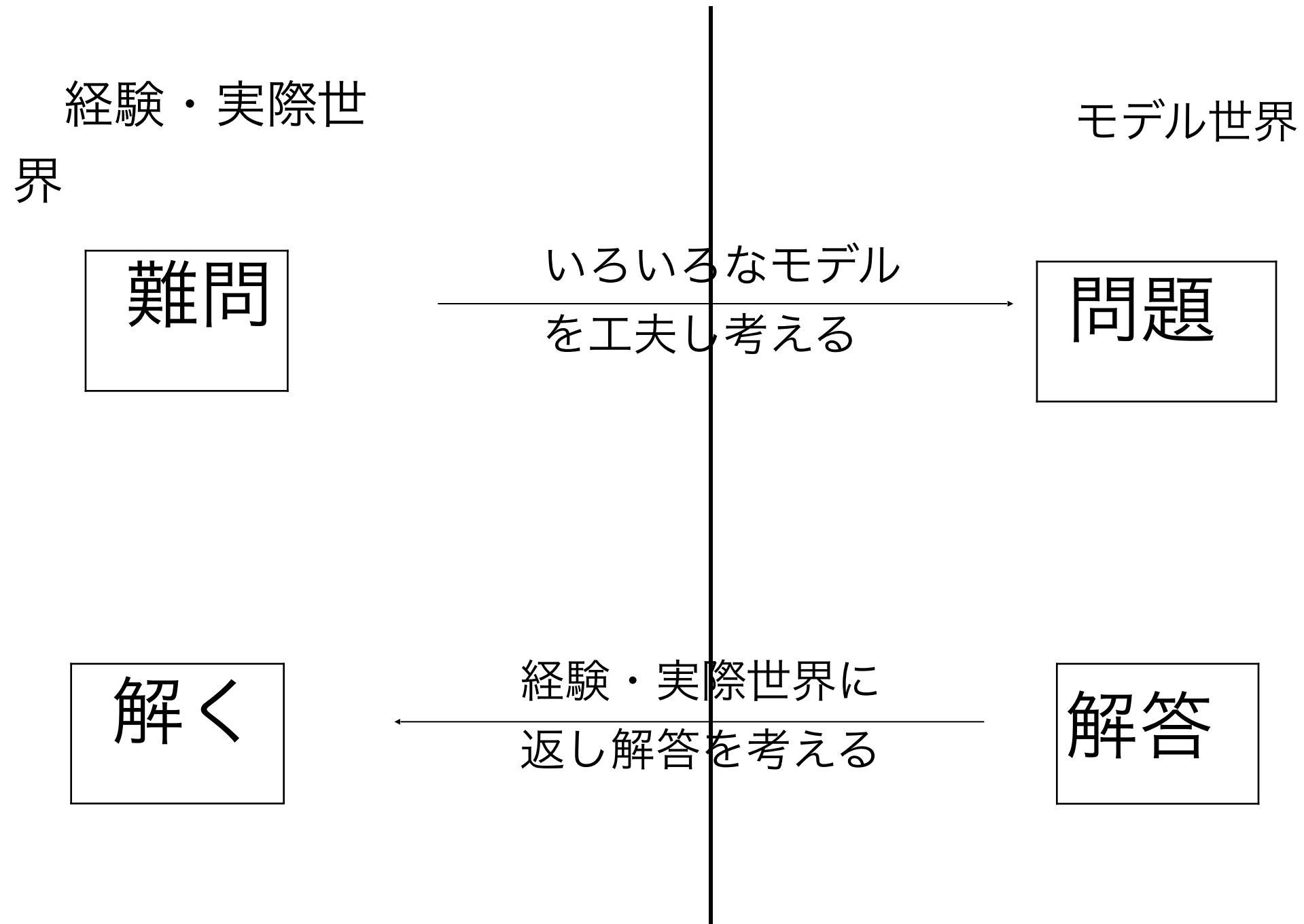
(3) 上記教育特有の場面設定した「現実問題からスタート」して行う「問題解決・数学化」の両プロセスを経る思考は、単純化すれば

具体世界←→イメージ世界←→記号世界

という「具体と抽象形式」間の双方向的な思考を育てること。

PISAではこう教材展開する指導原理は『問題提示』という性格上埒外においている。

3. 生活上の難問をモデルを工夫して解く人間



経験・実際世界



量化・数化・形式化



モデル（シミュレータ）世界



＊物理的モデル

風洞・水槽・理科実験・
フライトシミュレータ

etc.

＊数学的モデル

デジタルモデル

連続・離散変化

解析的モデル

etc.

＊社会学的モデル

数量化理論I~IV類

etc



いろいろ異なる領域にわたる具体的な諸課題



現象の再現



実物と等価なモデルで目的を果たすうえで同じ働きをするが実物とは大きさ・構造など

が異なるモデル、特に数学的モデルの場合、数・四季・方程式という実物でない抽象的な姿になる。

現実解



具象的判断・解釈



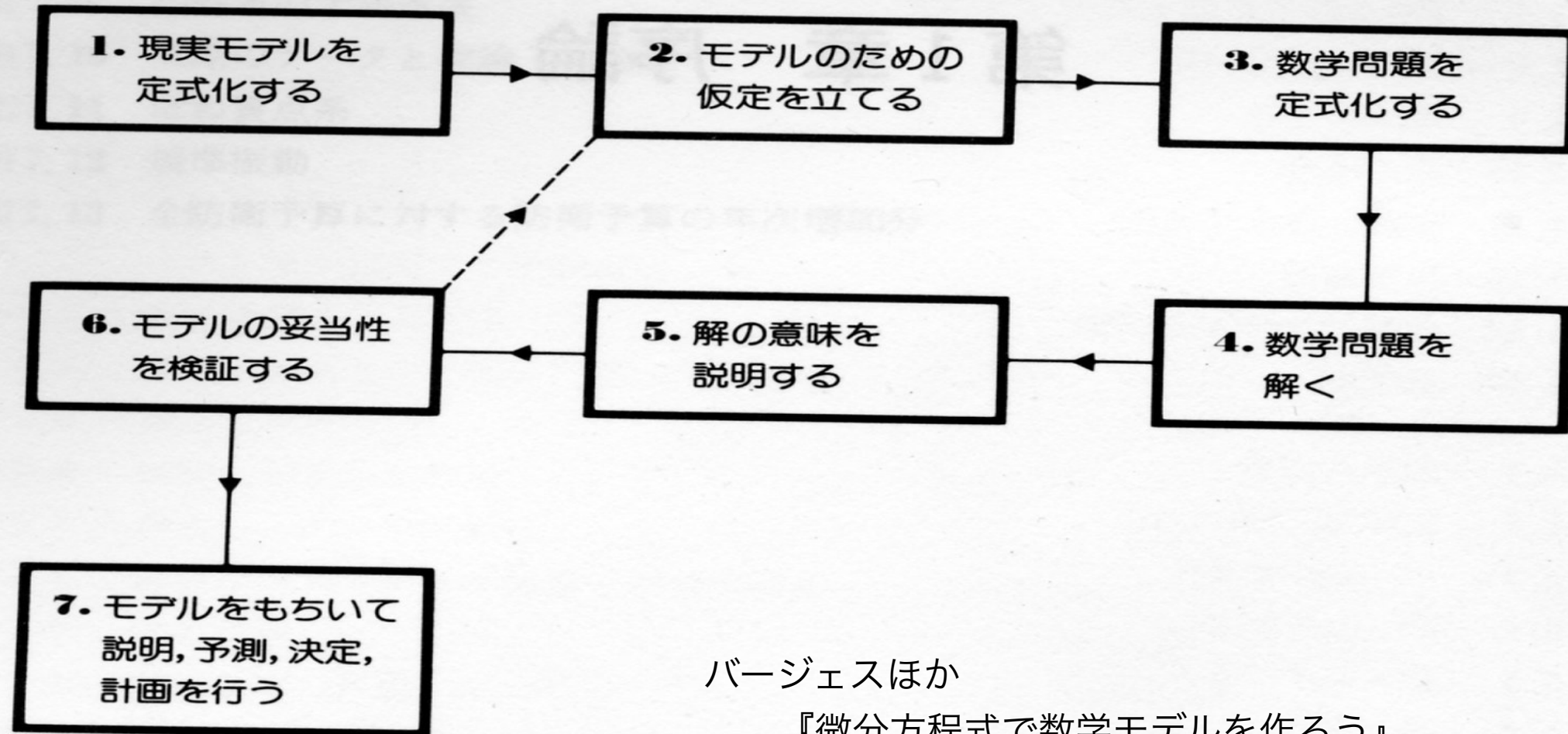
モデル解

人は如何にして難問に対処してきたか

5. モデル世界が数学世界の場合

経験・実
際世界

モデル世界



バージェスほか

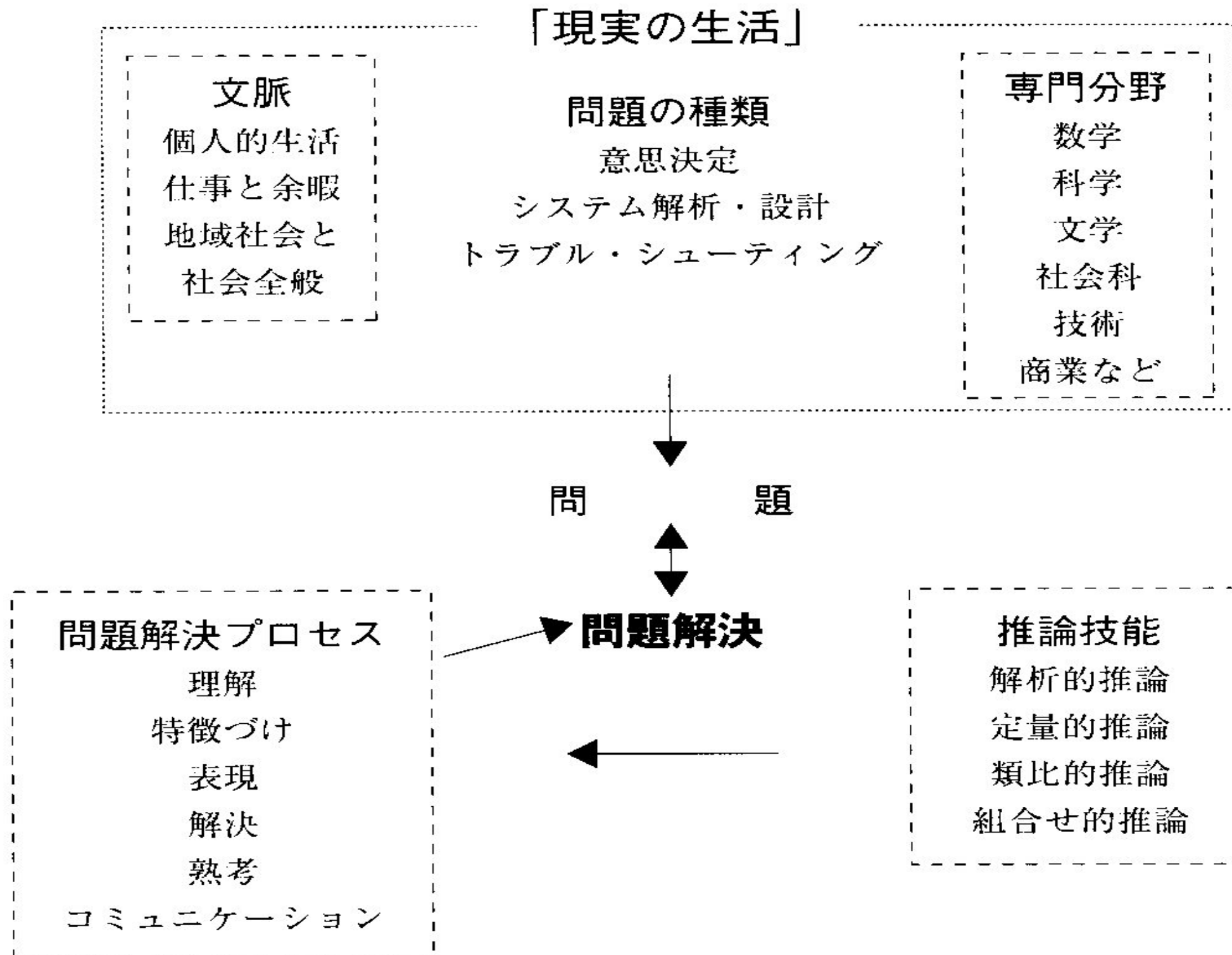
『微分方程式で数学モデルを作ろう』

日本評

これに似た数学活動の図式は、^{論社刊より}ヒンチンの「数学の建造物」説をはじめ、昔から世界の数理科学者例えば、^{フシエ}、^{ノイマ}＝^{エルゲ} ツェルツ、^{ケメニー}＝^{スネル}、^{ジーマン}など多くが提唱してきた。

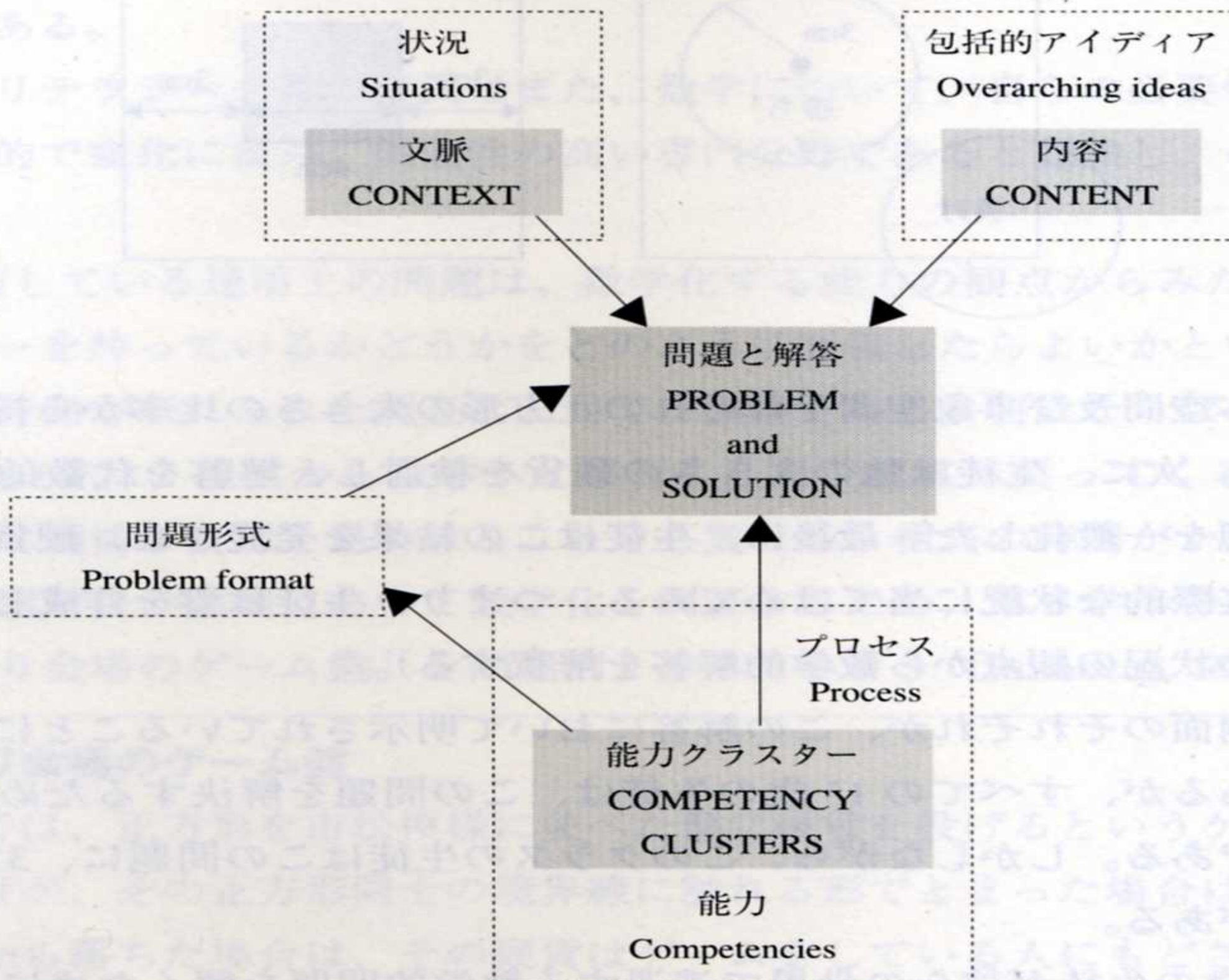
6. 2つの問題解決プロセス1 ～ 領域横断的プロセス ～

図 4. 1 ■ 問題解決の枠組みにおける主な構成要素



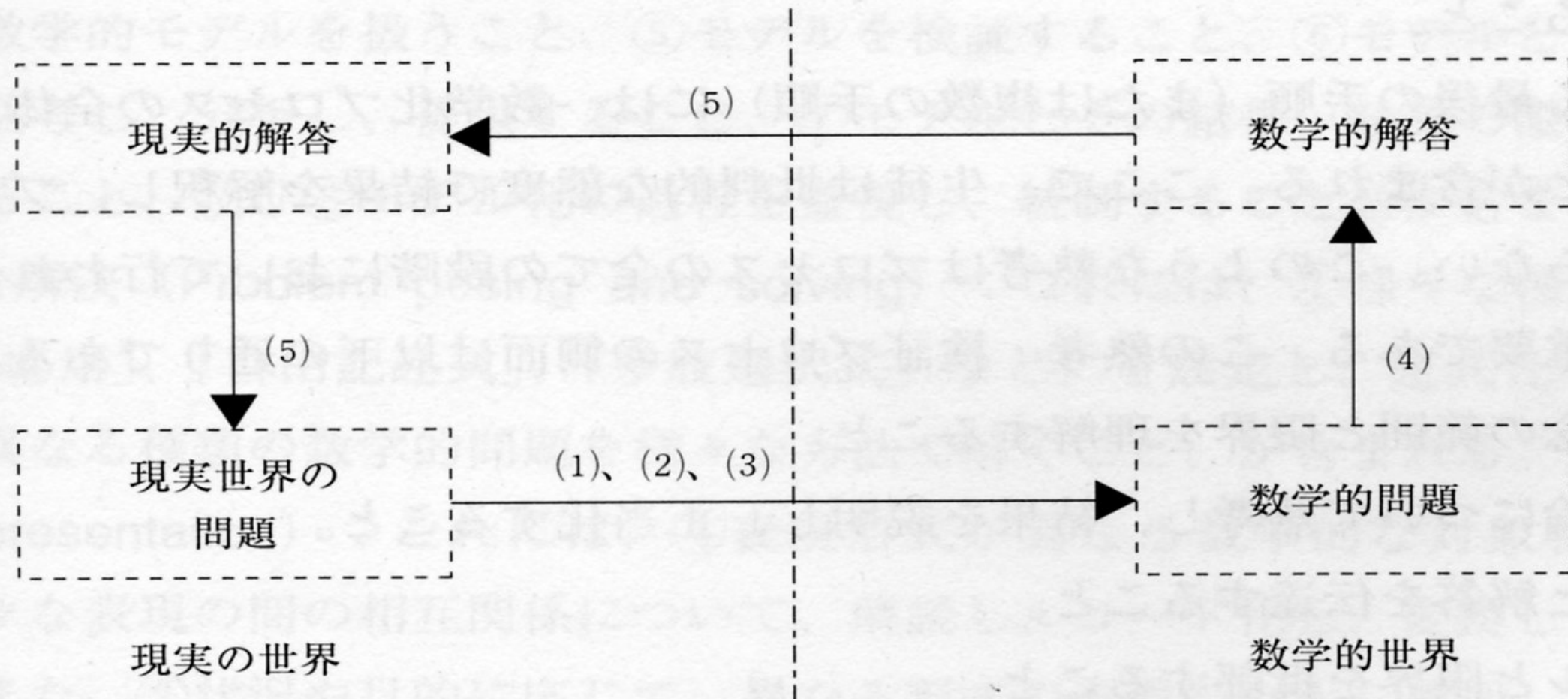
7. 2つの問題解決プロセス2 ～ 数学化プロセス ～

図 1.2 ■ 数学的領域の構成要素



8. 数学化サイクル・プロセス

図 1.3 ■ 数学化サイクル



- (1) 現実に位置づけられた問題から開始すること。
- (2) 数学的概念に即して問題を構成し、関連する数学を特定すること。
- (3) 仮説の設定、一般化、定式化などのプロセスを通じて、次第に現実を整理すること。それにより、状況の数学的特徴を高め、現実世界の問題をその状況を忠実に表現する数学の問題へと変化することができる。
- (4) 数学の問題を解く。
- (5) 数学的な解答を現実の状況に照らして解釈すること。これには解答に含まれる限界を明らかにすることも含む。

9. 数学化プロセスと教科横断的プロセスの比較

数学化プロセス

- (1) 現実に位置づけられた問題から開始すること。
- (2) 数学的概念に即して問題を構成し、関連する数学を特定すること。
- (3) 仮説の設定、一般化、定式化などのプロセスを通じて、次第に現実を整理すること。それにより、状況の数学的特徴を高め、現実世界の問題をその状況を忠実に表現する数学の問題へと変化することができる。
- (4) 数学の問題を解く。
- (5) 数学的な解答を現実の状況に照らして解釈すること。これには解答に含まれる限界を明らかにする機能とも、相互作用

注意しなければならないのは、数学のための設計の主要点には、学校で共通して教えられている基本的な用語、手順及び概念を知ること、及びこれらの主要点がどのように構造化され、使用されるかを知ることが含まれるということである。不幸なことに、数学における設計の主要点についての構造を知らなくても、あるいは問題を解決するためにこれらの主要点をどのように使用するか知らなくても、数学の設計の主要点についての多くを知ることができるのである。

上記の指摘は、数学の学習を暗記や数・文字『評価の枠組み』で行われると指すと考えられるが、もう既に現れているPISAの数学的リテラシーの類題をドリルさせるスタイルの数学教育にも該当する。教科横断の問題解決能力を正しく位置づけた数学実践活動が計画されなければならない。

問題に対処するプロセス

問題の状況が

- ・第1に、現実のものであり
- ・第2に、解決の道筋がすぐには明らかではなく
- ・第3に、1つのリテラシー領域内には限定されない場合、
- ・どの程度効果的に問題に対処し、問題を構造化し、表現し、解決することができるかを説明するように計画され、特に、次の6つの問題解決のプロセスを身に付けていることを例証しなければならぬ。

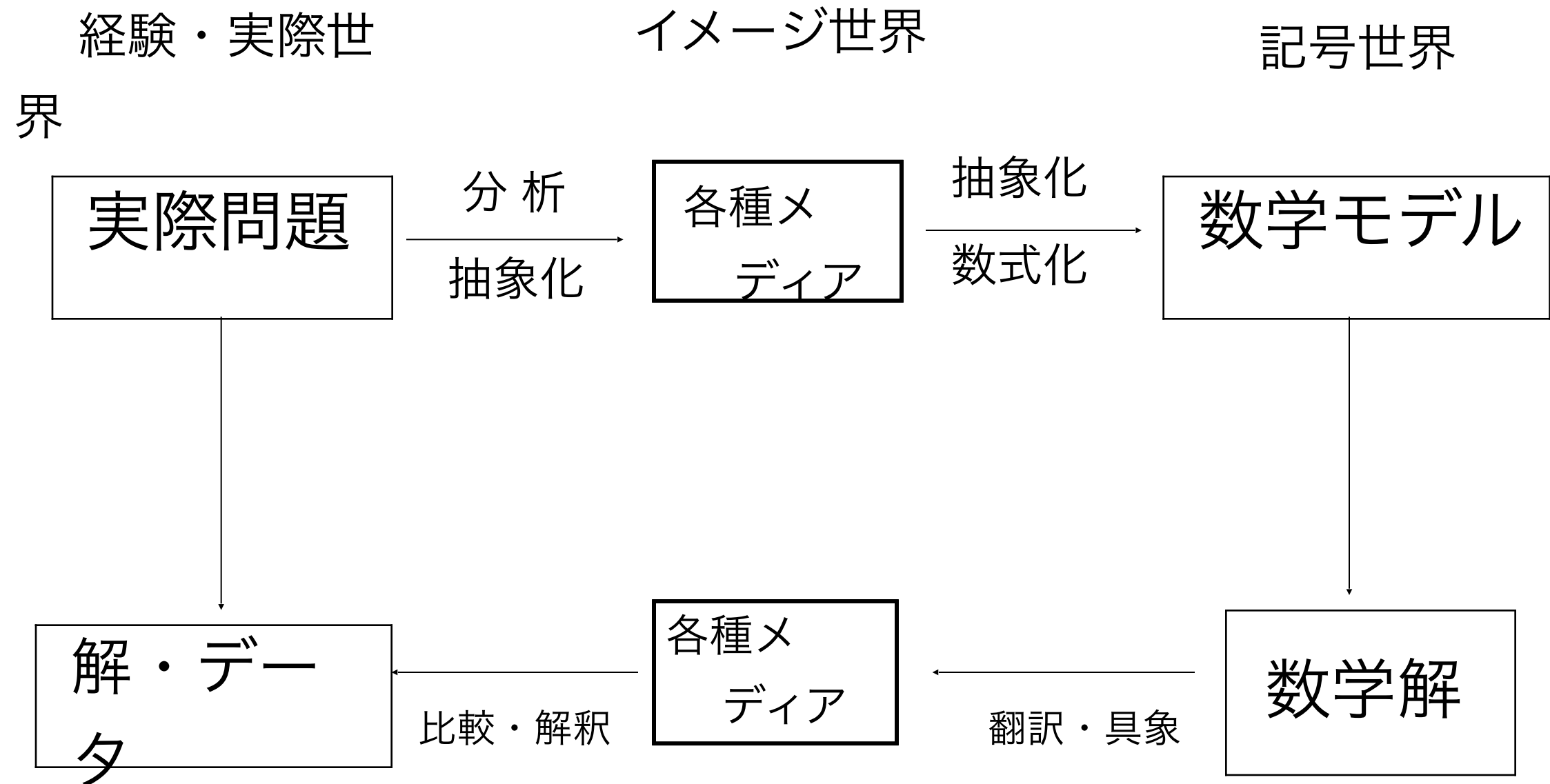
- (2) 「問題の特徴づけ」
- (3) 「問題の表現」
- (4) 「問題の解決」
- (5) 「問題の熟考」
- (6) 「問題の解法を伝えること」

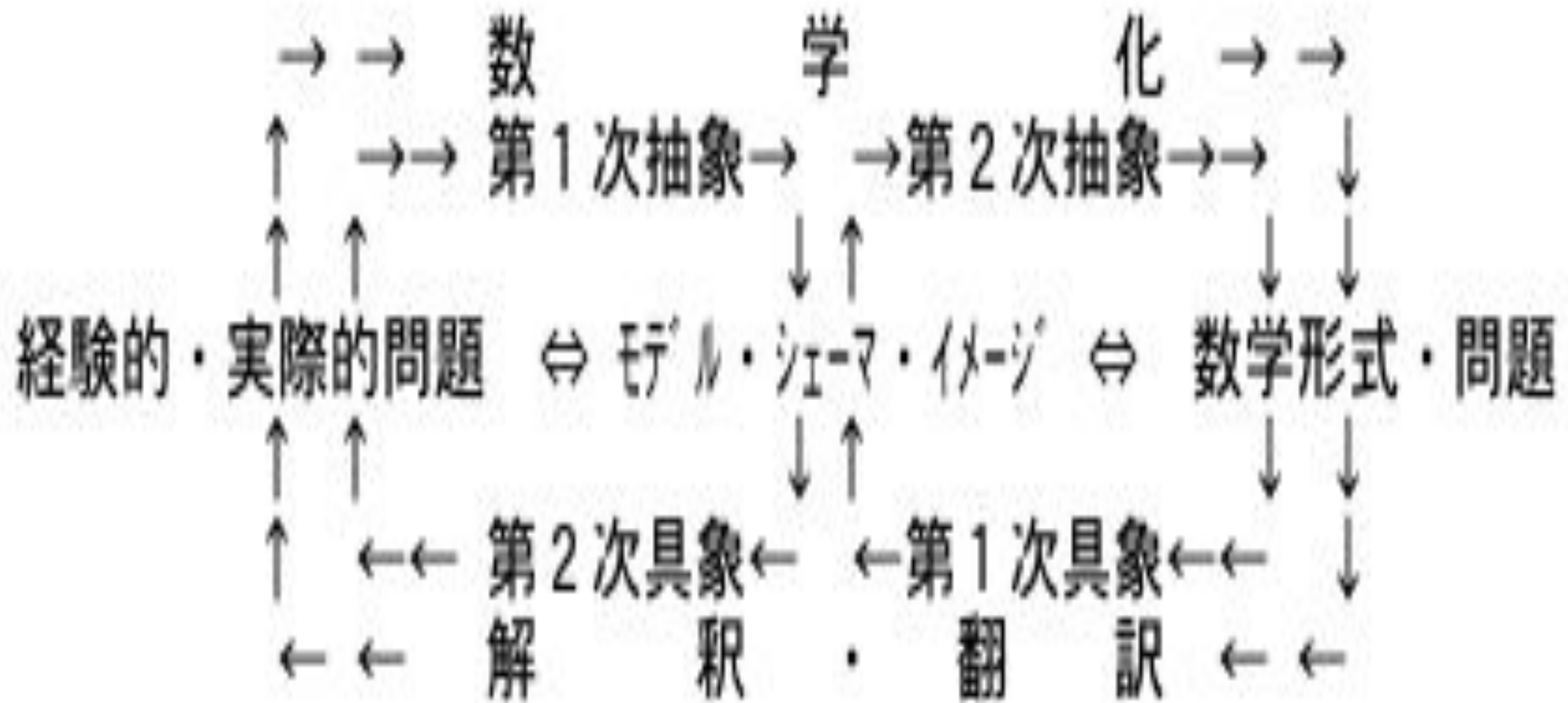
各詳細については解説参照

ただ単に最終的な解決方法よりもむしろこれらのプロセスに重点を置くことにより、人々が問題解決に対してどのようにアプローチするかを理解することができる。(中略)したがってこのアプローチは、問題解決が単なる調査の得点を超えて寄与するものについて、独自の説明を提供する。

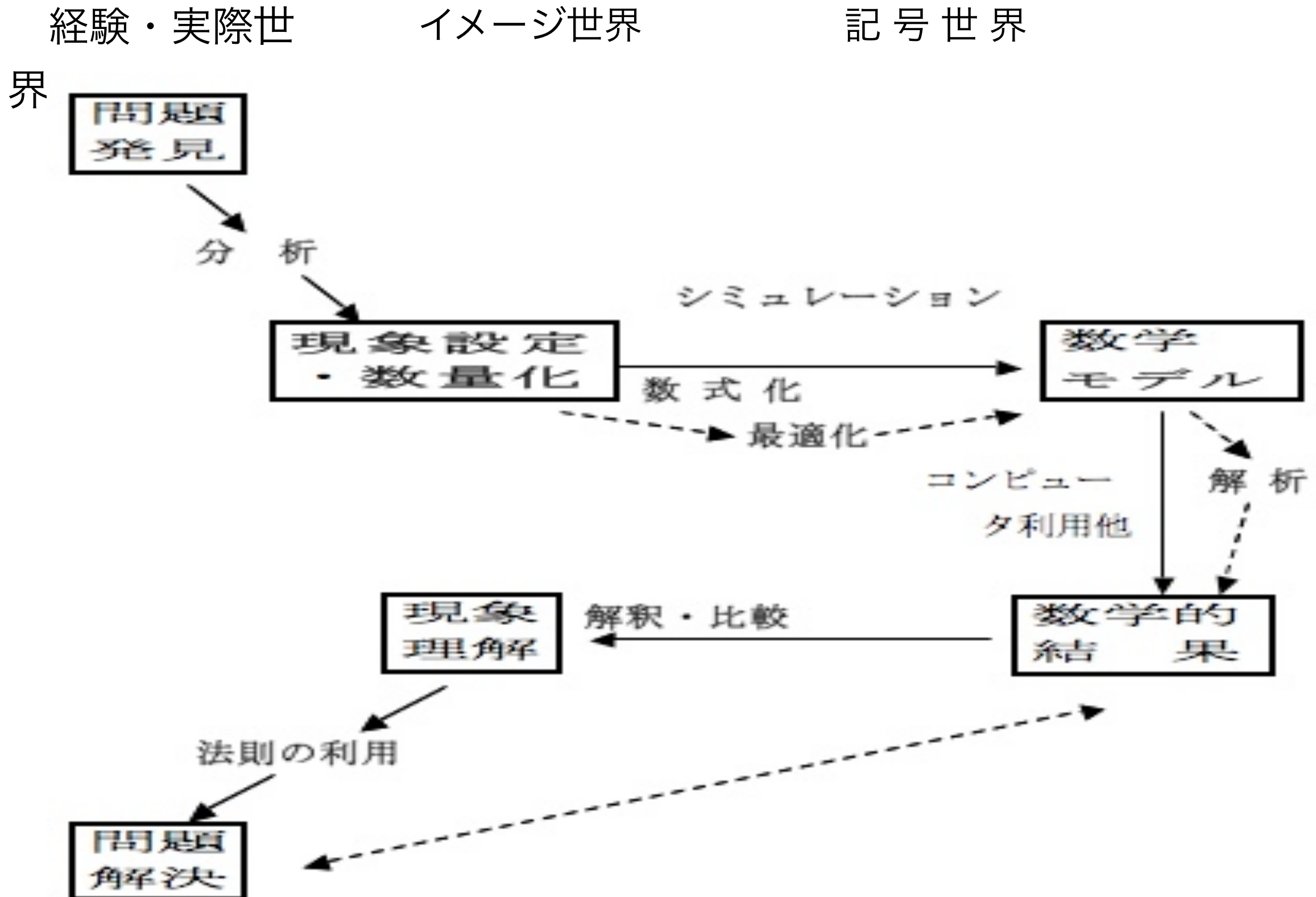
関連のあるプロセスを理解することはまた、教師が問題解決を指導する上で教育活動を準備できるようにする。

10. 数学問題は解くより創るのが難しい





12. 読解力と2つのプロセスの関係構図



13. PISAに反映されている諸論

状況に埋め込まれた学習ー正統的周辺参加

PISA調査は世界各国のさまざまな分野から300人にのぼる専門家の知恵が結集されているという。またそこに反映されている諸説の紹介もされている。例えば、数学教育に関わるものとしては『世界は数理でできている』（丸善刊）やポリヤの問題解決に認知心理学の成果などがある。そうした根底にはそれを支える80年代から90年代の学習・発達理論の転換としてのデューイやヴィゴツキーなどの学習理論の再評価、例えば、Y・エンゲストロームの『拡張による学習～活動理論からのアプローチ～』（1987）、レイブとウェンガーの『状況に埋め込まれた学習-正統的周辺参加』（1991）、ブルーナーの『教育という文化』（1996、『教育の過程』1960の彼自身による振り返り）などの提起がある。

このうちその数学観も見えるレイブとウェンガーの「正統的周辺参加」を見てみよう。

「正統的周辺参加」の概念：

- ・ 実践のコミュニティへの参加と熟練の発達として学習を捉える視点を提起する
- ・ 同時に実践のコミュニティの再生産と変容をも対象とする



両方に内在する共通のプロセスを探る

「正統的周辺参加」提起の意義

- ・ 学習を個人主義的な獲得の内化としてでなく社会的参加と捉える full participation (cf. PISA)

ウェンガーらは新たにcommunity of practiceを提起 コミュニティとしての学校改革を現実の課題に。彼らの理論の起点として学習を社会的参加と捉える立場は、identityとcommunity of practiceを理論の基本概念に据えることになるが、その後彼らは、これらの概念を中心に学習の社会理論を一層展開する。また、彼らは、Community of Practiceを、組織を学習と知識とが適うものに作りかえていく、キー概念として展開している。このアプローチの適用は主として企業での学習組織を例にしているが、さらには知識重視の組織を教育や市民セクターなどを含めた社会に普及させることも展望されている。なお『community of practice』（翔泳社訳刊）はハーバードビジネススクール出版物。

14. PISAに反映されている諸論

『状況に埋め込まれた学習』—その数学学習論

これまでの数学学習論の捉え方

(1) 思考というのは「一定の手続きないしは方式に従って情報を処理していること」とする考え方

(2) 「計算」とは学習によって獲得された「計算手続き」を正確に、迅速に実行することだとする考え方

(3) 学校で勉強すること（例えば、計算練習）は、実生活で利用すべき技能の習熟だとする考え方をスローガンの的に言えば、

学び手の日常的対象に、動作や行動を知的に適用し、数学の論理に導き、そうして獲得した、数学の諸形式を再び具体的事象の解析に適用する、というプロセス体験と『教育内容の現代化』と

そこで私は、広島AMIサロン「数学文化の見直し」において、さほど共通性はない。

左の学習論を「ゆるがせた学習論」

(1) 思考というのは「外界のさまざまな事物を利用し、それとの相互作用で遂行された活動であり、つねに道具付きの、道具利用としての人間の活動」と考えた。

(2) 「計算」というのは、実生活では抽象的な数字の演算操作ではなく、具体的なモノの操作やその評価という、文化的な実践に即したもので、この文脈の下では、人は「巧みに・かしこく」実行できるもの。

(3) 学校での勉強は、「学校」という独特の文化の中で、「計算練習」や「テスト」という活動に即して身につけさせられる特殊な振舞い方の一種に過ぎず、それは実生活とは異なる「かしこく」という文化の現代化」

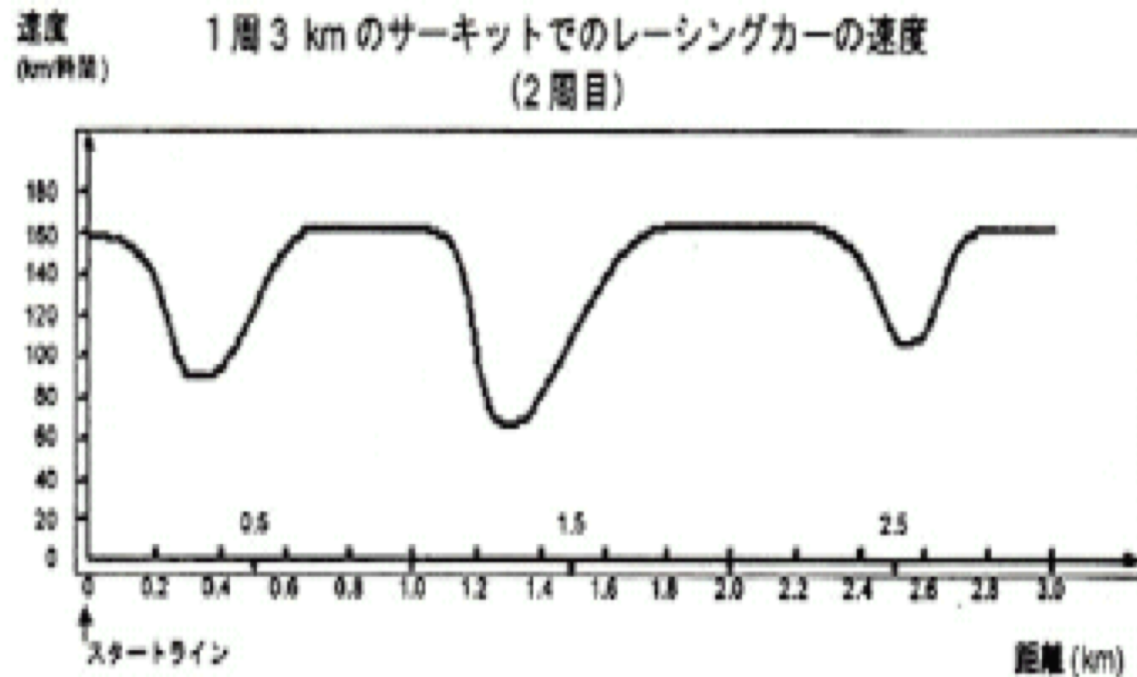
Let's Math. 学び手の日常感覚から数学文化へ

としたのだった。

15. 「現実問題からスタート」 させるというけれど

PISA 2000 「レーシングカーの速度」 より

下のグラフは、1 周 3 kmの平らなサーキットで、レーシングカーの2周目の速度がどのように変化したか



問1：スタートラインから、もっとも長い直線コースが始まる地点までの、およその距離は次のうちどれ？

A 0.5 km B 1.5 km C 2.3 km D 2.6 km

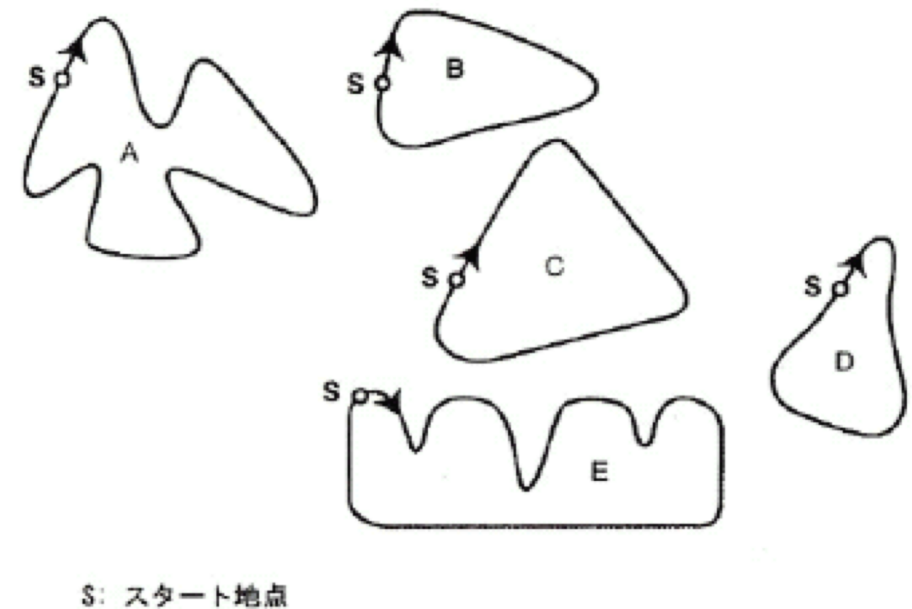
問2：2周目で、速度が最低を記録した地点は、次のうちどこ？

A スタートライン B およそ0.8 km地点

C およそ1.3 km地点 D サーキットの中間地点

問3：2.6km地点から2.8km地点の間のレーシングカーの速度について、どんなことが言えるか。次の一つを選べ。レーシングカーの速度は A一定である

問4 下の図は、5種類のサーキットを表しています。左に示したグラフのレーシングカーが走行したのは、どのサーキットですか。次のうちから一つ選んでください



問1、2、3は問4に比べて易しい問題であることがわかる。問4の誤答で最も多いのは選択肢Eのグラフの形をそのままサーキットの形としてしまったもので、その反応率はOECD平均38%である。

PISAをこの問題で斬るのは、現場教師だったら、誤答の多さが事前に予測できる選択肢Eを選ばないように理解させることができる「現実問題からスタート」させる工夫こそしなければならないはずだからである。

例えば、次の『紙と鉛筆でカーレース』ゲームをさせ速度・加速度の体感とv-t、S-vグラフ描きの指導展開で

16. 学び手にとって「現実問題からスタート」とは

紙と鉛筆で「カーレース」ゲーム

＊車を進めるルール

ルール1. 次に車を進める新しい格子点およびその格子点と現在地の格子点とを結ぶ線分はトラック(コース)から絶対にはみ出してはならない。(脱輪)

ルール2. 二台の車が同一の格子点を同時(同一手順数)に占領してはならない。(衝突)

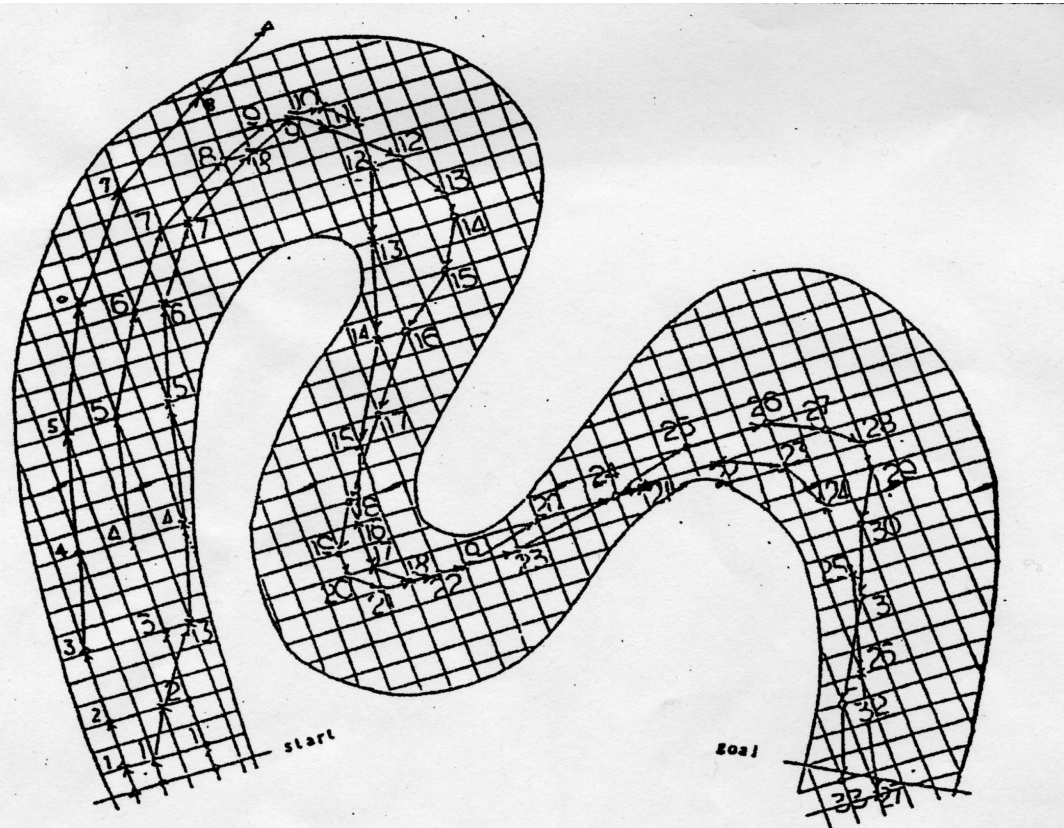
ルール3. 前の車が目盛を

垂直に k 個 水平に m 個

進んだものと仮定する。

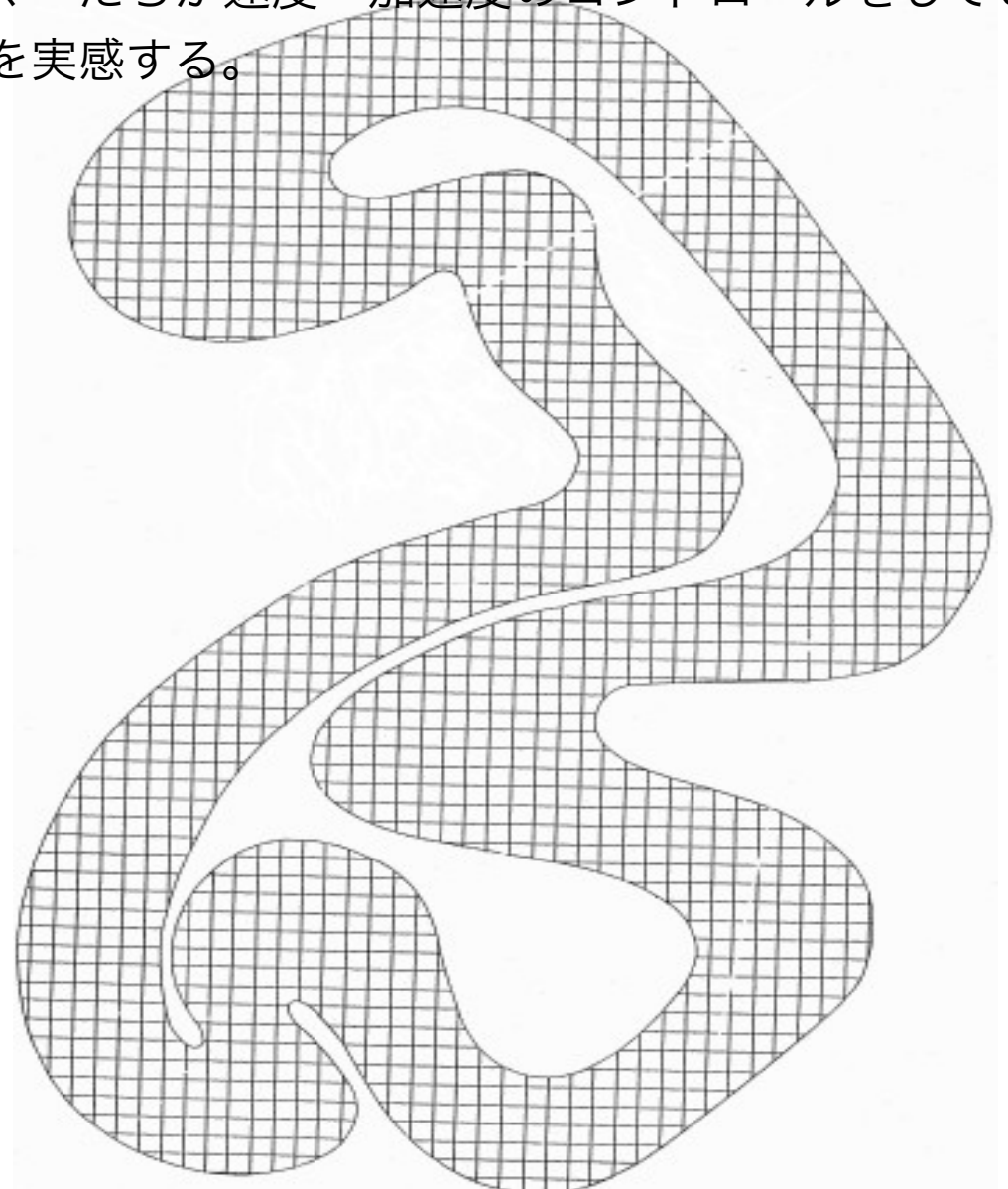
そして、今回の手が

垂直に k' 個 水平に m' 個



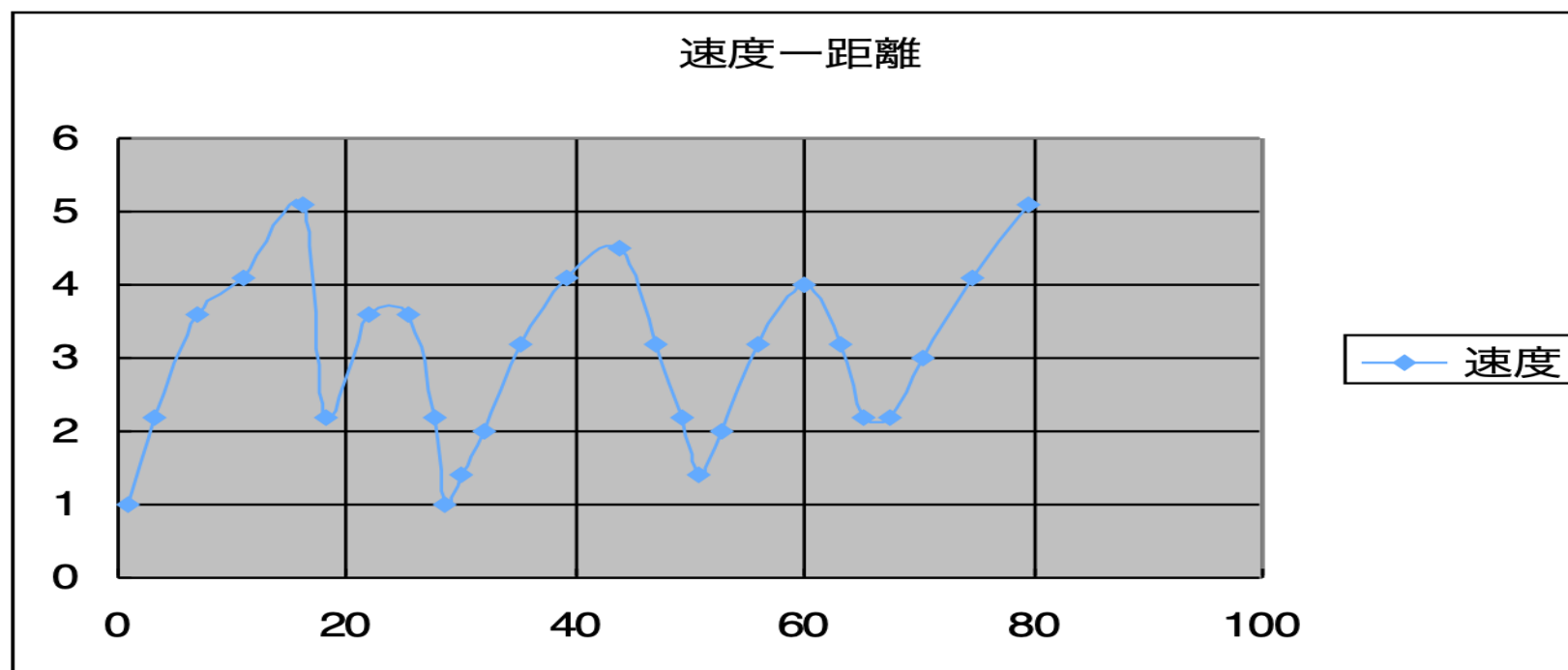
物理現象は、時間を変数とする速度や加速度など学び手が縦横にコントロールできない性格上、リアリティを感じさせ難く理解の難しさを感じさせる。

左ルールによる下図トラック(コース)における「紙と鉛筆によるカーレース」ゲームは、これを行う中でゲーマーたちが速度・加速度のコントロールをしていることを実感する。

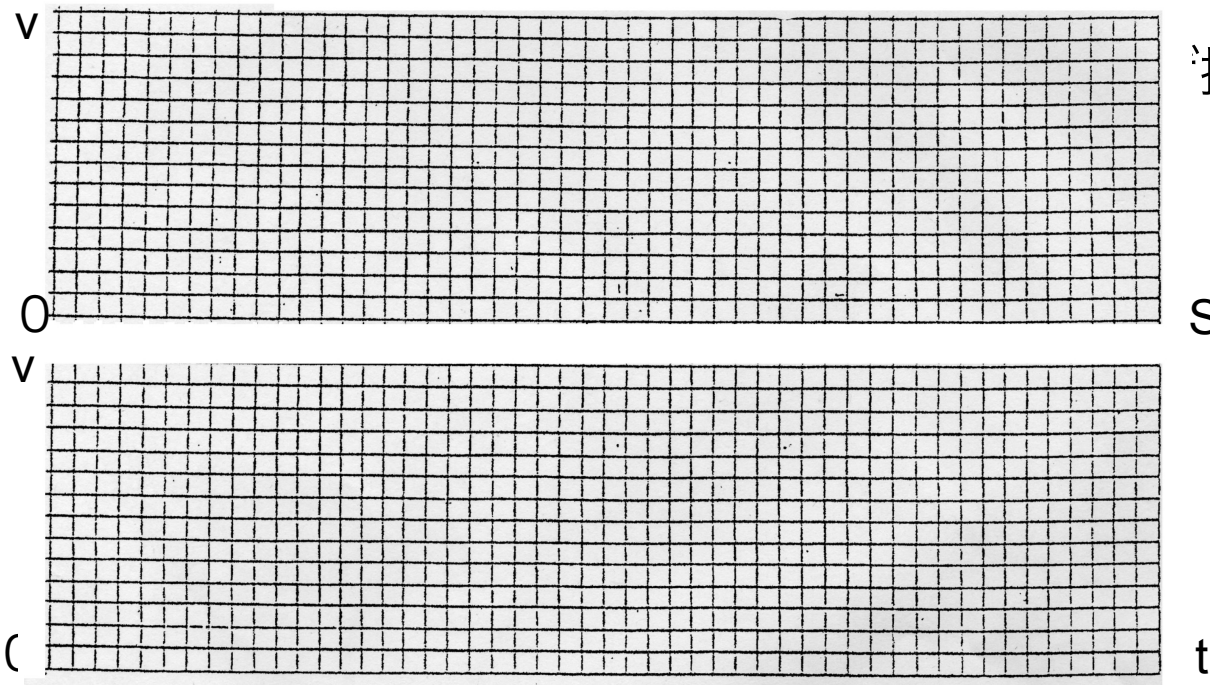


(M.ガードナー「数学ゲーム」に学んで)

例示のカーレース・ゲームの
速度－時間、速度－距離グラ
フ



17) 現実問題からスタートして2つのプロセスを体験させる



紙と鉛筆で「モンキーハンティング」＜実際世界＞

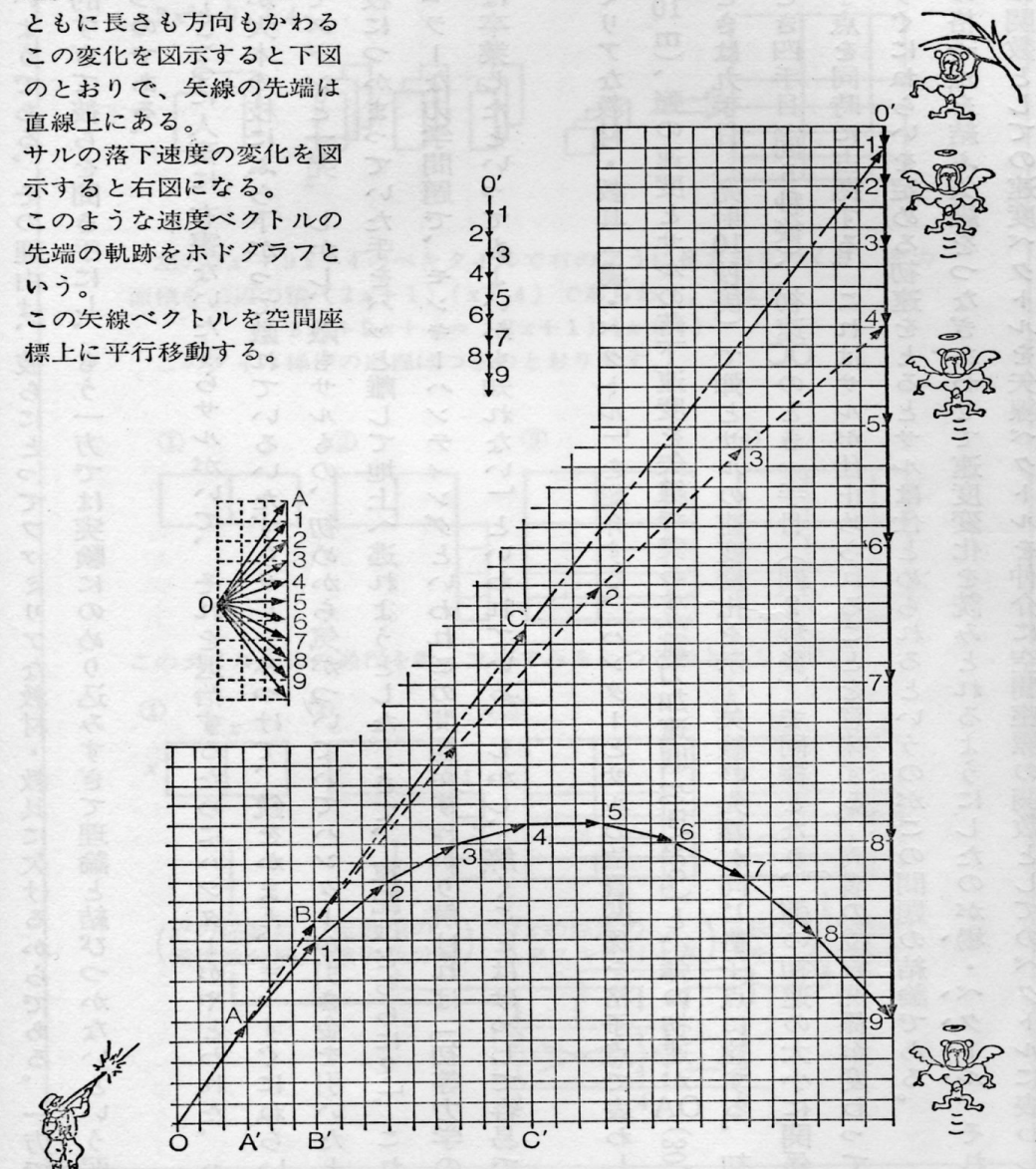
右上の問題は、すっかり解ければ「初等力学の第1課は

卒業したと言ってもよいかもしれない」と言われるポピュラー

な力学問題「モンキーハンティング」。これも「現実問題から

スタート」できる問題だが、最大の弱点は、サルの自由落下や弾丸に働く力などもまた何度も試行し観察できない物理現象である。ところがこれを、次のように「落ちる紙幣はなぜ掴めない？」という体験にすれば、学び手に自由落下運動を繰り返し巻き返し体験させることがで

ある所に人畜に有害な悪戯ザルがいて、それを退治するためにハンターが雇われた。ハンターが大本の枝にぶら下がり、悪戯ザルを見つけて銃を発射。敵もサルもの初めから気がついていて、ハンターが引き金を引いた途端に枝に掴まっていた手をパツと離して地上へ逃れようとした。さて、軍配はどちらに？



(柴田義松編『授業シリーズ』有斐閣1982所収)

拙稿『教材をいかにつくるか』から抜粋)

18) 現実問題からスタートして2つのプロセスを体験させる2

指を開いて待機させ、「お札を手から離すのを見て、その札を掴んでごらん」と交互に実験させると、実はヤマを張らない限り、お札は指で掴めないという不思議現象が起こる。

この学び手たちの不思議感をベースに、

- ①お札に働く力を見つける
- ②力、つまり加速度から速度を見つける
- ③速度から位置を見つける

という3段階のカリキュラムを組むことが必要。

カーレースは平面「格子」でのゲームだったが、これは立面「格子」で考えることが必要（自称『格子モデルの数学』）。

<イメージ世界>

弾丸にもサルにも働く力は、空気との摩擦を考えなければ、重力だけである。つまり、いつも一定の力で下向きに引っ張られている。

初速度 V_0 でサルを目がけて放たれた弾丸は、この V_0 を水平方向と、鉛直方向に分解して考え、鉛直方向だけ毎回1単位速度が落ちると考えればよい。サルは、鉛直方向への落下だけだから、弾丸の鉛直方向と同じように毎回1単位速度が落ちると考えるだけでよい。

ハンターとサルの位置関係を格子点で表し、弾の速度とサルの落下速度を矢線で表すと、弾の初速がOA（30、50）のときは九手目（発射10秒後）で弾とサルの速度変化を示す矢線の先端が同じ格子点に達する。初速OBのとき四手目（同5秒後）、初速OCのとき1手目（同2秒後）で同様となり、弾の初速の大小に関係なく格子点を同時に占拠する。これはサルが仕留められることを意味する。

両者の位置関係が変わっても、まっすぐに狙いを定める初速をとると、サルは仕留められるというのがこの問題の結論である。

<記号世界>

ここで、時間と共に、大きさと、方向の変わる速度を表すのが矢線であり、この移動から、弾丸の最高点に達する時、着地する時等々を読み取ることができることになる。これをもとに、任意の時刻における速度・位置、弾丸の方程式、飛行時間、最高高度、飛距離を求めることにつなげてゆくのだが、ここでは、一般原理にはほど遠く、また、代役にすぎないが、微分法則や積分法則、求積などの微積分の概念や方法がある。

*「落ちる紙幣はなぜ掴めない？」の理由

ヒトの視覚情報による遅れが150m/sec以上であるとされているのに、長辺160cmの万札を例にとれば、そ

JR東海・葛西社長に聞く

トヨタ自動車、中部電力、JR東海の3社が中高一貫の男子私立校を愛知県内に設立する。有力3

基礎知識つけ、創造性も

——そもそもなぜか理由は。教育に対する議論は常に、トヨタの豊田章一郎名

次会長と、中電の太田宏は我々企業にとっても大問題だから、自分たちが貢献できる方法はないかと考えた。小さくても具

体的なモデルをつくり、それが既存の学校の一つという強い希望があるが、全国から広く生徒を

——公教育のところが一番問題なのか。学校現場の実情は詳しくは分からない。ただ、

——効率重視を目指すのか。塾に行かなくても塾に

有力3企業の中高一貫校構想 学校の「手本」めざす



構想について語る葛西敬之社長＝名古屋市で

——自ら学校を設立しようという結論に至った

——公教育のところが一番問題なのか。学校現場の実情は詳しくは分からない。ただ、

エリート養成ではない

行ったのと同じぐらいの方法論はこれかだが、イギリスの名門パブリッ

——構想発表後の反応は。構想がまとまった上で、賛同

は、3社は後ろに下が

は、3社は後ろに下が

は、3社は後ろに下が

は、3社は後ろに下が

は、3社は後ろに下が

は、3社は後ろに下が

は、3社は後ろに下が

は、3社は後ろに下が

心意気、理解できる

藤田英典・東大教授(教育学)

構造改革特区の株式会社による生徒の学校経営に、不登校の児童の3社と

だが、このようなタイプの学校で

的に話を詰めるながら、基

がポイントだ。3社の構

想が固まった上で、賛同

者を募りたい。