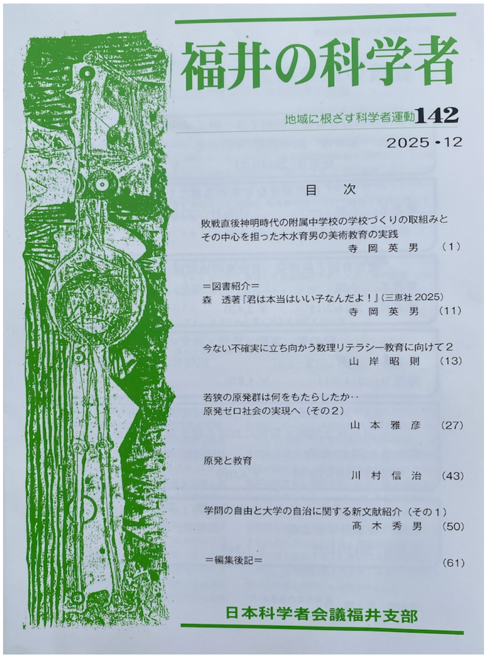
今ない不確実に立ち向かう数理リテラシー教育に向けて　２



所収の拙稿 Web 増補版

２０２５年１２月

山 岸　昭 則

今ない不確実に立ち向かう数理リテラシー教育に向けて　２

山岸昭則（元福井大学非常勤講師）

はじめに　テーマ『今ない不確実に立ち向かう数理リテラシー教育に向けて２』は、福井大学（以降、井大）高等教育推進センター年報No. ４（2014.10　）に掲載された同名論文（以下、年報論文４と記す）の続編です。発刊10年後の2024年、英国の教育検索サイトCORE.ac.uk [1)] が世界に向け“探究”の先行研究として探究を指導する教師・研究者に案内、日本にも逆輸入され、案内・閲覧されるに至った。続編中に度々引用しますので巻末注（１）のURLを併用しご覧下さい。

なお続編本体は科学誌『福井の科学者No.142』(2025.12.20日本科学者会議福井支部発行)中の拙稿ですが、紙幅制限上、案内だけで終わっている多くの数理リテラシー教材を具体的に閲覧できるWeb増補版としました。

Ⅰ．子どもから大人まで楽しめる数理実験
〜モンテカルロ・シミュレーション〜

私いう「今ない不確実[2)]」の典型である大地震が能登半島を襲い、筆者・小島両名の旧家も被災した。

ところが、この地震は「今ない不確実」と形容し難いものであった。なぜなら地震前500回に及ぶ群発地震の前兆があったからである。英国の調査「安全国ランキング」で、日本は多くの局面で安心安全な国だが地震に火山噴火、台風の危険を考慮に入れておかないといけない国と旅行案内されているという。加えて私たちには交通事故をはじめ疫病、火災、原発事故、詐欺等々、身の回りに迫るさまざまな「不確実とリスク[3)]」に覆われている。

こんな日本に生きる私たちは、このリスク・不確実に対する判断能力を持たなければ、小さなリスクを避けるために大きなコストをかけ、反対に大きな不確実に繋がる恐れがあるのにあまり顧みないと言う失敗をする。この後者の典型が膨大な前兆を得ながら「事前」復興[4)] 対策の取り組み不足でした。

こう考える筆者は、本稿もまた、引き続き「今ない不確実」に立ち向かう青少年教育の一環として、次の①〜③を内容に、数理リテラシー教育のあり方を提起することにした。

① 年報論文の中心だった、偶然（不確実）事象を乱数導入によって予測・制御に役立てたモンテカルロ法の原理を統計学の世界的権威C.R.Raoの著書から「複雑な図形の面積を求める方法」[5)] の引用紹介である。

② 中学校教材「サイコロ転がしで琵琶湖の広さ」を求めさせる教材を開発した小島和美氏（元井大非常勤講師・現折り紙教育を考える会）の実践紹介[6)] 並びに筆者の井大講義受講生・大見謝恒宇氏（現レキオスソフト（株））が行なったサイコロ転がしによる求積と厚紙の重さによる求積（年報論文４「数楽５」参照）の数学的同一性の証明と拡張（2017年）の詳細紹介。

③ 工学部教師養成課程の喫緊の課題、「数学嫌い」「理科離れ」対策と併せて、現行教育体制下の決定論偏重の理数教育に欠ける「不確実とリスク」を対象にした数理リテラシー探究の模索。

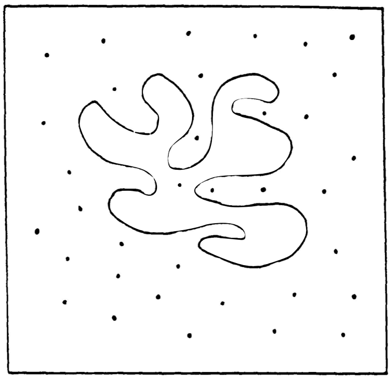
なお当時2008年中学・高校指導要領の理数教育はそれまで20年に及ぶ「精選」や「ゆとり」名目の内容削減と時間削減の反動で、時間増、言語（外国語を含む）教育と理数教育の充実を謳いながらも成功していたとは言えなかった。

Ⅰ−１　モンテカルロ法の基本原理

Rao の紹介する原理は、すこぶる簡単で必要最小限の乱数を生成しそれに簡単な比の計算を併用するだけである。例えば、図のように与えられた正方形

の面積に対しその中に描かれた複雑な形の面積の割

モンテカルロ法（シミュレーション法）



複雑な図形の面積を求める方法

$$\frac{\text{図形の面積}}{\text{正方形の面積}} \approx \frac{\text{図形のなかに落ちた点の数}}{\text{(正方形のなかに落ちた)ランダムな点の総数}} = \frac{a_m}{m}$$

定理　：　$\frac{a_m}{m}$　→　真の比の値　$(m \to \infty)$

合を知りたいとしよう。

この課題では器具を用いて面積を測る簡単な方法はないものとする。いま正方形の隣り合う２つの辺をｘ軸、ｙ軸にとり(x,y)を選び座標(x,y)をもつ点・を正方形の中に記す。ここでx,yはともに区間（０，ｂ）からとられたものであり、ｂは正方形の一辺の長さより大きい。この操作を何回も繰り返したとき、ある段階でその図形のなかに落ちた点・の数a_m、正方形のなかに落ちた点の数がｍであったとしよう。

ロシアの有名な確率論研究者コルモゴロフが与えた大数の強法則と呼ばれる定理があるが、これによればもし取られた点の組が本当にランダムであれば、ｍを大きくするにつれて比a_m/mの価は正方形の面積に対するその図形の面積の真の比の値に近づく。この場合、この方法の精度は乱数発生器がどの程度信頼できるか、および与えられた条件のもとでどのくらい多くの乱数を発生させることができるかに依存している。

Ⅰ-２　サイコロ転がしで琵琶湖の広さを求める

「**数楽１**」上図Raoの“複雑な図形”に小島は琵琶湖を選び右上図正方形６×６のなかに納めｘ軸、ｙ軸には１～６の賽の目を配し、大小二つのサイコロ投げで縦５、横４の出目なら竹生島のマス目に×印を書き込めば良いとし、これを仮に36回繰り返し、琵琶湖内に×印が24記されていたならｒ＝24、N=36とし、次式に代入すると、

$$\frac{\text{琵琶湖の面積S}}{\text{正方形の面積（n×n）}} = \frac{\text{琵琶湖のチェック回数r}}{\text{正方形内のチェック回数N}} = \text{相対度数}$$

$$= 24/36 \quad ≒0.67$$

になる（琵琶湖の広さ公称値674平方㎞)。

こうRaoの紹介に則ってモンテカルロ法を教育的に咀嚼した中学用授業シート『琵琶湖の求積』は作ったものである。「数楽１」には読者も大小サイコロ一対を用意すれば図に直接書き込んで演習できるように、次の参考データが提供してある。大小のサイコロを２人ペア（一人遊びも可）で交互に振り、該当箇所に×印を打ち10分交代で繰り返し、サイコロを投げた回数N数え、琵琶湖のなかの×の数ｒを数える。ただし正方形の中に琵琶湖の地図が半分くらいの時は回数を半分だけ数える。例えば大４、小５なら（長浜のマス目）のときは縦４横５のところに×印を打つが、この場所でもし４回×印を打ったなら２回は琵琶湖にあるとすると申し合わせる[7]。

筆者が実践当時の1998年版高校指導要領の推定・検定の手法は、確率・統計教科書の最後の方にならなければできないカリキュラムであったので、モンテカルロ法による「真値」に、当面は複雑な図形を切り抜いて重さから求積して答え合わせをし、小島もこれを踏襲した。

Raoによれば、この方法のあまりの簡単さは、最初の提唱者であった数学者で統計学者K.ピアソンの意に反して、指導学生や学術出版業界にはすぐには理解されなかったが、今や注８、注９の通り統計学のみならず多くの科学において、複雑な数値的諸問題を解くための標準的な方法になっている。

年報論文４「数楽５」は、筆者の高校・大学での講義だけでなく、子ども劇場や父母会、技術者やビジネスマンたちとの各種集会で体験してもらったもので、どこの体験者からも驚きの声があがった。

まず、中学生の感想の要点を列挙する。実際に近い面積をもとめることができたのですごいと思った。いつか違うところの面積をこの方法で求めてみたいと思う。サイコロを振って、琵琶湖の面積を求めるなんて絶対に無理だと思っていたが、細かい値まで求められてびっくりした。サイコロ転がしや切り抜いた画用紙の重さで面積が求められ、数学は計算ばかりでないことを知った。次に、物理工学専門課程でモンテカルロ法を学んでいた学生は、[モンテカルロ法という数学をサイコロ２つで体感できた。こういう授業作りができるようにしたい」と、また知能システム科の学生は、「モンテカルロ法はプログラミングでやったことがあり、手法は知っていたが、それを誰でも分かるように体験できるようにしたことに驚かされた」と、さらに「大学院での機械学習にもモンテカルロ法が応用されたり（中略）この講義で初めてモンテカルロ法を知り受講できてとても良かったと今でも思っている」（OB）と。

小島が報告した全国研究集会ではいくつかの疑問や批判があったが、後ほどまとめて解説する。

Ⅱ．不確実や収束値未知の確率的・解析的な問題探究にもモンテカルロ法

真値が分かっている琵琶湖の求積をモンテカルロ法で解いてもらったのは、この簡単な方法の有効性を体感してもらうためであって、真の狙いは、「科学技術立国論」推進の中にある、日本の学校教育に欠けている非決定論的「リスクと不確実性」への探究の水先案内となることへの願いであり、福島原発事故以前に学校教育の中に仕組まれていた原発「安全神話」破綻の轍を踏ませない決定論偏重の「科学への過信」への戒めの端緒になることであった。

「科学やテクノロジーはほとんど確実性を扱わない。科学は世界がいかに動いているのかを発見しようと努力を重ねてきて、ある程度成功した。（中略）しかしながら、科学的な知識が絶対的であるということは、仮にあったとしても極めて稀であり、時として重大な誤りを犯す場合もある。したがって最も科学的な予測であっても何らかの不確実性を免れることはできない」（PISA2003 評価の枠組み「不確実性」抜粋）。

”ブラック・スワン＝今ない不確実”の存在を筆者の講義で知った技術者の卵たち曰く、「１回の実験で滅多に起こらない超レアな場合が現れることがある、それが”ブラック・スワン”か」、「計算して理論的に破壊現象が起こらなければその装置は安全と手放しで喜んでいたが、実際にはその安全ラベルの貼られたものの中に”ブラック・スワン”が潜んでいることを油断してはならない」等々。

本稿執筆中の10月１日の新聞・TV 報道で「全国学力テスト 石川 中３数学単独首位、国語は一位タイ」と活字が躍った。他方、日本は久しく「理系人材不足が深刻」、しかも世界では数学の優秀な人材を求めて争奪戦を演じているなかで「国内に求める人材が少ない日本は他国に求める」始末。そして、この国の「大学において理系学生の定員抑制の教育政策こそが真の原因だ」（日経X 2022.12　理系人材不足を招いた「国の定員抑制」電通大の田野学長が語る総数50%への処方箋）と、それが大学受験に波及し「理系学部の倍率は高いから」という理由で理系進学を諦める学生が増えるという結果を招いている。

「数学嫌い」、「理科離れ」の蔓延に呻吟し、その上に理系人材不足に陥っているこれまでの日本の教育スタイル（①1918 年の勅令以来の世界に類を見ない、学校教育における文系・理系組分けの上、②知識を与え、③与えた問題を解かす。以下、日本型教育スタイルと記す）を見限り、小・中・高校の教育で慣れ親しんできた暗記知識を、たかだか４分程度しか話せない「４分間知識」と呼び、それで養成された「既成概念」の粉砕からスタートして、理工系学生により現実的な発想力・想像力＝課題探究・創成能力を育むことをめざす流れが、1999 年発足した JABEE（日本技術者教育認定）教育。大学卒業後 40 年間エンジニアとして通用する「40 年間知識」をめざして、2024 年３月現在 123 の理工系大学・高専が参加し、国際協定にも加盟。

だがそういう不足を招いたのは他ならぬ間違った国策の日本型教育スタイルの歪みの表れであり、21 世紀も四半世紀も経過した今、遅ればせながらも、「４分間知識」と見くびられ引導をわたす動きが生まれたのを心から喜ぶ元エンジニアの筆者である。

このことも含め、OECD/PISA を代表する世界の教育改革の潮流の下、日本型教育スタイルの基調の転換を迫られ、思い切った改造が必要であったからでした。いよいよはじまるかと思いきや、後期中等教育までを担う諸学校は依然として日本型教育スタイルを踏襲させるばかりか、PISA 対策に「国内の競争で燎爰する」と嘯く時の文科相すらいた。さらに現場では習熟別と称しながら低学年ドリルに学校ぐるみで取り組むことを善とする応急対策の傾向である。こうした傾向が日本の高校生の約半数が「社会に出たら理科は必要なくなる」（TBS 報道（日米中韓の意識調査 2025.7.3）[10] と考えている状況を招いていることに無関係ではない。これと、理系人材不足を招いて苦心する日本の二つの教育潮流の乖離、チグハグさは明らかに不合理かつ間違っている。

年報論文に引き続く本稿、そして小島実践「確率の導入～数学の不思議～」の「今ない不確実に立ち向かう数理リテラシー」教育に焦点化した所以でした。なぜモンテカルロ法導入なのかというと、小島は中学教育現場における確率・統計教育の未成熟さからくる教師として、生徒たちへの反省があったという。その典型が「不確定な事象をとらえ説明すること」(2008 年指導要領解説中学校編) と指示しながらも、具体的な不確定な問題の解決につなげられない教科書展開があった。小島が指導要領解説の不十分さを指摘しているのと同様な体験が、筆者にも大学生に講義するなかであった。それを次の「数楽２」で提示する。

「数楽２」読者の皆さんもどうぞ。

右の写真は、紙と 1 円硬貨と 500 円硬貨。明らかに大きさが違う。その紙に 1 円硬貨大の孔を空け、「この孔に 500 円硬貨を通して」と言うと、学生たち「無理でしょう?!　大きな 500 円硬貨が小さい孔を通るわけがない」とあちこちから声。

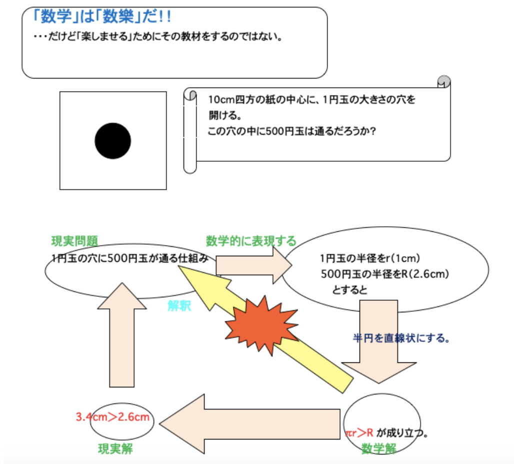
そこでマジシャン役の筆者が1円玉の大きさの孔に500円玉を押し込むように「えい！やー！」と掛け声」とともに 500 円玉が抜け落ちるのを見せて、「さあ皆さんも挑戦してみよう」と。一見、通りそうにないのに、学生たちも試行錯誤する。案の定成功しない。ところが、「あれ?!　落ちた!?」という学生の声がチラホラ聞こえてくる。

そこで筆者がマジックの種明かしです。

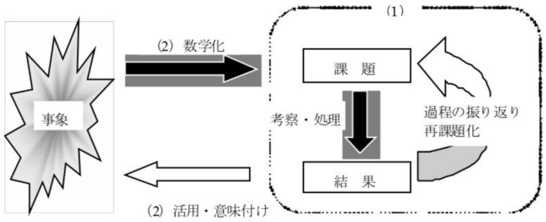
1 円硬貨大の孔の直径に折り目を入れ 500 円硬貨を左写真のように紙に挟み、紙孔が作る半円周が直線になるぐらい引っ張るとスルリと落ちる。ここで数・式表現して理由を考える。1 円硬貨の直径を測ると 2 cm、半円周はπcm、つまり約 3. 14cm。500 円硬貨の直径を測ると 2. 6cm だから通過することになる。

すると大学生が、小学生のように「数学は数楽だ！」と悦び溢れたレポートをしてくれた（右上図)。実は、この悦びに溢れたレポートの裏には筆者にも思いもよらないことが隠されていた。それは3 年時の教育学関連講義において、高校指導要領解説に掲載されていた右下図「数学科プロセス図」が抽象的に口頭で解説されるだけで、マジシャンの種明かしの試行錯誤と数学計算が相俟って胸にストンと刻まれた、その表現がレポート図だったのです。

この右中図、これはこれで前進でした。それ以前は、内実不明な「算数・数学見方・考え方」という説が呪文の如く唱えられ、心ある教師たちの批判の的だったからであ

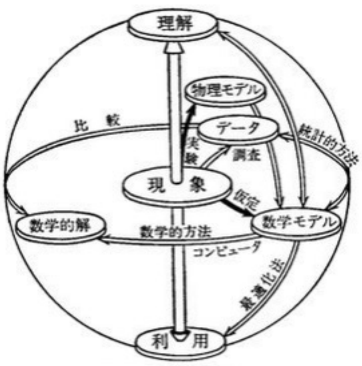


る。ところが、教育学や教科教育法を受講する理工学生たちにとっては、このプロセス図もまた、絵に描いた餅でしかなかったようで、「この教育課程研究は教員免許を取るうえで必要な講義なので、3 年生で受けた講義と同じく教



育について抽象的に小難しく考える内容と思っていた」一つだったそうである。

遊戯的なマジックの種明かしが教育学関連教師の教育活動や指導要領解説の思わぬ弱点を炙り出したというわけである。なおこのプロセス図は、数学学習のみを対象にしているがⅥ. の「人は如何にして難問に対処してきたか」の経験・実際世界から始まり、量化・数式化などを経てモデル世界に至り、各種モデルによる思考・計算などを経てモデル解を得、判断・解釈を経て現実解に至る「コの字」の過程を数学化プロセスに特化したものである。



現象の理解と利用

大学を含め教育現場、そして教科書も、さらには指導要領解説までもが学び手たち

の想いの多くとかけ離れ、満たしていないこと、筆者と小島を含め、教師たちにとって反省すべき尽きない課題と捉え、乱数の早期導入によって「リスクと不確実性」を教材化したのであった。

なお、前頁最後の写真「現象の理解と利用」は、VI.で改めて数理リテラシーを考える一冊、近藤次郎『数学モデル−現象の数式化−』（丸善　1976）の方法論提示で「人は如何にして難問に対処してきたか」のフローチャートより包括的といえよう。

年報論文４において 1998 年度高校指導要領解説の１箇所を特に批判した。それはコンピュータ利用に関する箇所だったが、多岐にわたる教育観の恣意性を批判した。

（引用）

数学的活動は、コンピュータなどを積極的に活用することによって一層充実したものにすることができる（中略）数学教育でコンピュータなどを積極的に活用することも重要である。これまで、学校数学の問題は解答の便宜のため簡単な数で解答できるように工夫されたものが多かった。しかし、コンピュータなどが活用できるようになった現在では、高等学校数学においてもより現実の世界を反映した問題を扱い、生活との関連を重視した学習が可能となってきている。そのような学習は数学の学習に対する関心や意欲が高くない生徒に数学を学習する意義を認識させることにもつながると考えられる。

（引用終り）

この解説には賛同しかねる。第一に、後段のアンダーライン部分、教授学原則のうちこれを内容とするものを敢えて挙げれば「理論と実践との結合の原理」である。この原理は学習に対する関心や意欲が高くない生徒を対象にした原理ではない。また、この種の学習が教師大人が高評価するほど生徒から受け入れられるものでもないさらに、この原理を充実するための史的模索（抽象と具象間を上り下りする思考の学習の構築）をないがしろにしてきた学校教育が、現実とリアルに向き合う学習を疎んじる傾向を生んだのではなかったか？　第二に、この原理は、コンピュータ出現以前から模索されてきていたものであって、コンピュータが活用できるようになって可能になったわけではない。ポリアの仕事に「電気もコンピュータも人工衛星もない時代、人類はいかにして問題を解いたか」『自然科学における数学的方法』（シュプリンガージャパン 2007）と探求する仕事がある。教育的にはこの方向にこそ価値がある、と批判した。

タブレットを導入する学校が増えつつあるといわれる。一方、タブレット導入先進国・韓国やフィンランドなどでは効果が疑問視されたり中止されるにいたっていると報道されている。小型・価格等ハード的な環境整備が整ってタブレットを全生徒に配布できるようになったことと、一斉授業に使うことの是非とは別問題である。教育現場にＩＴの成果である機器やデジタル問題集、そしてデジタル教科書が大手を振って入ってくる２１世紀、インターネット草創期のC・ストール『インターネットはからっぽの洞窟』（1997草思社）の警鐘、

（引用）

コンピュータネットワークは、僕ら個人個人を孤立させ、僕らに実体験を見くびらせ、僕らの読み書き能力を低下させ、僕らの学校や図書館の存在を危うくする

（引用終り）

にいう「さまざまな面で低下を招く」事実が世界的に確認され、報告されていた利便性の反面である危険性の根本的解決は未だになされていないことを等閑視してはならない。

AI を巡り新たな諸問題が加わる中この筆者の指摘はまだ解決されていないと考えている。

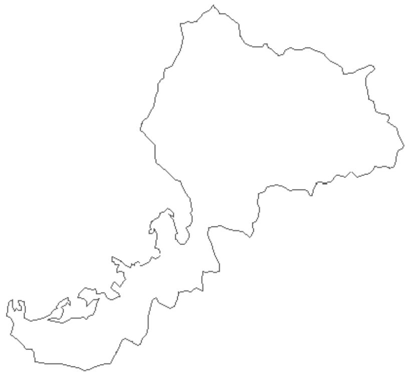
日本型教育スタイル批判に費やしたが、改めて、数理としてのモンテカルロ法の魅力は、決定論的な既存知識の“教え＝学び”では答えようがない。働く場、生活の場での答えの分かっていない、はじめて難しい“計算が不可能あるいは前もって収束値を求められない確率的あるいは解析的な”課題にぶつかったときに、サイコロ、コンピュータなどの乱数発生装置で乱数を導入して工夫できる [7]。

推測できても正答がわからないのが普通だから、各種ランダマイザーを使ったモンテカルロ法で求めた幾つもの近似値（実験ペアの数だけ）を使って、「真値」の精度を評価する推定・検定の統計手法の導入を早めるなど、現行カリキュラム改革の道も拓けるというものである [9)]。

「**数楽３　略解**」中学生に行った小島実践と同様に、複雑な地形の福井県の求積をモンテカルロ法で求める過程で、決定論に偏った教育を受けてきた井大工学生たちの取り組みを見ると、当然ながら中学生の反応とは異なる以下のような意思決定（判断）の問題が浮上した。

下図は福井県白地図です。これを右図 15cm×15cm の正方形に収め縦横 6 等分し、賽投げ 76 回行い地図上の出目が 13 回、つまり 13/72≒0.1805 の割合。

地図の縮尺を用いて、紙上の面積が地図上で何km^2にあたるかを換算すると、



（地図縮尺１/1000000，公式面積Ｓ　4,188.99 ㎞^{2}）

15 ㎝×1000000＝150000ｍ＝150 ㎞　から (150×150) ㎞^{2}、この 13/72 と福井地図面積比 S/150^2 が近似するので Rao のいうモンテカルロ法の原理から次の式が成り立ち

$$S/150^2 = 13/72$$

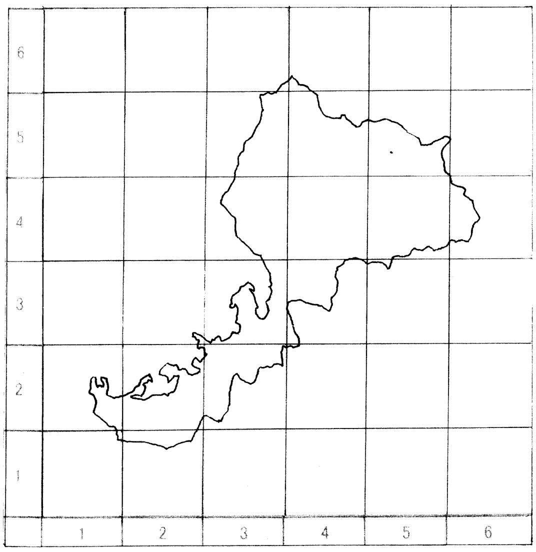
よって　$S = (13/72) \times 150^2 \fallingdotseq 4{,}062.5$ ㎞^{2}

この賽投げの回数を増やすほど両方のＳの値は近づく（大数の法則）と思いがちだが、ところがそうはならない壁に出会すことになる。有能な学生が、少数回のサイコロ実験ではダメ、もっともっと多数回実験が必要と福井県の面積を少数回のサイコロ投げで近似的に求め、徐々に回数を増やして行った時、どの程度のサイコロ投げの回数で得られた近似値ならば信頼に値するか、という推測と（判断の）検定を行うという私のカリキュラムの中で、コンピュータ・シミュレーションを行い多数回試行の結果をレポートしてきた。ところがレポートで、多数回実験の結果がカオス状態を示すグラフに出会して、「自分が組んだプログラムのどこかにミスがあるらしい」と半信半疑の添え書きを携えてきた。また違う学生は、サイコロ実験の回数を少数回から徐々に増やして真値に近似するには回数を増やせば増やすほど真値に近づくという先入観（実は、2008 年度中学校指導要領の教師用解説書でそのように教えるようになっていて、中学校教師たちはそれを鵜呑みにオウム返しで教えて来た結果）を持って壁に直面した。

どちらのタイプの誤りも、偶然現象には大数の法則が成立するという前提から来る“誤った判断”、大数の法則が成り立たない偶然現象に直面し、量的拡大が質的転換～カオス状態出現～をもたらす場合もあるという（弁証法的）認識ができなかったわけである。

***工学部４年生に刷り込まれていた大数の法則　〈1〉**

学生が、小島氏授業シートの 6×6 は粗すぎ、サイコロ転がしの 100 回は少なく、公称値 4190　㎞^{2} とのズレが大き過ぎると、48×48 でＣプログラムを作成しシミュレー



ション 10 万回行い面積を測定した。そして 、「1 万回ぐらいまでは値が変動しているが、その後はほぼ変化していないことが分かった。 従って、10 万回シミュレーションした結果、収束したと考えられ、福井県の面積 S は 4800 ㎞^{2} である。しかし、福井県の面積の公称値は 4190 ㎞^{2} であり、これは測定結果の約 85%の値である。今回の測定の平均値は 4775 ㎞^{2} であり、標準偏差 σ は 58 であることから、公称値と測定値は 10 σ の値の違いがあることが分かる。平均値から 3 σ の値の領域では 99%収束するのに対し、10 σ もの値の違いが出たならば、これは信頼に足る数字ではないと言える。しかし、1 億回シミュレーションしても S は約 4800　㎞^{2} の値に収束した。10 万回から 1 億回にシミュレーションを増やした場合（大数の法則によれば）精度は 100 倍に上がるはずであるのに対し、ファクターが 4800 と 10 万回と変わらない値を出したため、この値で収束するのは間違いないだろう。従って、公称値との値のズレの原因として、48×48 でも精度が低い、元となった福井県の地図の精度が低い、などの理由が考えられる」とレポートした（終講後確認したところ、次の学生同様に大数の法則を信じて疑わなかったとのことであった…筆者）。

一方、サイコロ・シミュレーションによる求積の結果は 4,060㎞^{2}。この方が、学生が行ったコンピュータによる多数回シミュレーションの公称値との値のズレが小さく“より適正である”といえよう。

***工学部４年生に刷り込まれていた大数の法則　〈2〉**

自分自身、確率を考える上で大数の法則というのは当たり前に成り立つ法則だと思っていたので、今日大数の法則が成り立たない事象もあるということを知って驚いたし、同時にとても不思議に思った。

そこで大数の法則が成り立たないのはどういう場合かを調べてみた。大数の法則は期待値が存在することを前提とし

ているので、つまり期待値が存在しない事象を扱う場合は大数の法則が成り立たない。たとえば、安定分布（正規分布やコーシー分布）において特性指数α が $\alpha \leqq 1$ の場合は期待値が存在しないので大数の法則は成立しない、と。

さて、今頃になってだが、年報論文４でも多用してきた“数楽”という用語は誤解を招くことを承知の上で使ってきたため、“モンテカルロ法”を“楽しい授業”のための一手法と誤解し、乱数・確率導入のツールあるいはランダマイザーとしての観点に立たない“楽しい授業”の遊具としてサイコロやコイン、そしてトランプにコンピュータを利用する教師たちが出るかも知れません。

紹介した壁の前で悪戦苦闘する大学生たちの姿は、II.において小島が2008年指導要領解説教科書展開の問題点と指摘していたことの証左と言えるでしょう。世に出る直前の大学4年生まで不確実性と関連する学びを待たされるのは彼らにとって酷である。学生はレポートで曰く、「遅ればせながら本講で不確実性という題材の重要性、面白さの一端を実感できた。大学３年までの勉強のほとんどは正解の分かっている、決まっている問題だった。大学４年となり卒業研究が始まったがこれは明確なゴールは決まっていない。実験結果をどのように解釈し、どのような結論にするか１つ１つ考えなければならない。社会に出れば、より多くの意思決定をしなければいけなくなる。高校の物理教師になれた場合・・（中略）・・自分の想定しない場面に直面した際も真摯に対応していくためにも、今期の授業を忘れずに、実力、経験ともに身に着けていきたいと思う。」（下線は筆者）

OECD/PISAは決定論偏重教育を正すには「つづり方やかけ算から教育を受け始めた子どもたち・・（中略）・・。また、答えは１つで一方が正しく、一方が間違っていると考え」させる学びの環境を初等教育の早い段階から改める必要があることに異存を挟む余地はないと考える。

一連の拙稿『今ない不確実…』において、現在の決定論偏重教育から脱し、変動を予期し快く立ち向かえる子どもを育む決定論・非決定論を融合した新しい教材を新しい袋「数理リテラシー」に入れることを呼びかける由縁であり、教師たちには次に案内する２題のようなランダマイザーを早期に導入した実践を試みて頂きたい。

「数楽４ 紹介」仔猫四匹の性別の分かれ方

次図は何の変哲もないよく知られている問題ですが、敢えて案内するのは、これを小島氏の「サイ投げで琵琶湖の求積」と同じくサイコロやコインを用いたモンテカルロ法として「数楽」教材化できます。つまり、コイン利用なら４匹の仔猫として４枚の硬貨を、その表裏で雌雄の別を表現する。大小や色別４個のサイコロ利用なら４匹の仔猫を、そして出目の偶数と奇数で雌雄の別とするのである。

この「数楽４」と次の「数楽５」のコインとサイコロの使い方を参考に演習問題を解いて下さい。

略解を巻末に添えてあります。

「数楽２」から「数楽５」までを念頭に、保留していた小島実践への懐疑（含む否定）への回答をする。

＊疑問１）琵琶湖の面積をサイコロ投げの実験で？
（邪道ではないか）
＊疑問２）面積は一様分布、一様な量。これをなぜ不一様なサイコロでやるのか？
＊批判１）サイコロ二つで６×６のマスの一つを決める。結果は実験によって異なる。一様になるためには相当数の多数回実験が必要。
＊誤解１）面積と確率の関係はないのでは？
＊誤解２）重さ比べで求積するとはこれ如何に？

「数楽５」自販機の釣り銭の入れ方を考える

統計・数理の『術・学・観』を考えよう２

独自データで経験則から統計・数理へ

山岸昭則（石川　2011.08.06）

「今こそ遠山啓を語る」（『数学教室』’08.12月号所収）で遠山さんに学び継承すべきことは、

現代数学と数学教育とが結びつき得る可能性の提示とその実現

を果たしたことであり、私たちはそれを継続実現することと書いた。

統計的実験（モンテカルロ）法は歴史的には、「決定論的な数学の問題を乱数を用いて解く」（ノイマン）と考案されたとする説他がある。しかし今やすべての科学において、複雑な数値的諸問題を解くための標準的なシミュレーション法と位置づけられている。

私はこれまでも「自販機のつり銭」問題を難しいグラフ（理論）応用による分析や二項定理による立式とコンピュータによる計算で実践してきたが、ここで新たにサイコロ投げや乱数表で解決するモンテカルロ法で実践を試み、数理思考を進める上で重要な１ステップに位置づけた。

ここでは難しい分析や計算は一切必要なくサイコロ投げのデータだけあればよく、誰もが取り組め且つ新しい学びがあるからである。右表の自販機内の「釣銭枚数変動シミュレーション」表は、５０円の商品と釣銭50円硬貨100枚を入れ、100円硬貨を入れると品物と釣銭50円1枚が出る。100円硬貨で買いに来る客が50円硬貨で買いに来た客の倍と予想したい時は、百円使用客を賽目１～４で、五十円使用客を賽目５～６とすれば倍の客数をシミュレートできる。釣銭の50円硬貨は何枚ほど入れておけば良いか？追加された５０円分は釣銭に加わるものとする。

例は、客100人がサイコロ投げした＜独自データ記録＞中の「賽A」欄の出目から釣銭枚数の増減を転記したもの。100枚中残り66枚という結果は、釣銭枚数を40枚ほど入れておけば良いと語っていることになる。

なお、硬貨の出現比　百円:五十円 = 67:33 = 2.03:1　は

百円客数 ： 五十円客数 ≒ ２ ： １ を意味している（賽A）。

また、私が主題にしているのは、老若男女を問わず学ぶ者すべてが、可能な限り

学びに必要なデータは独自に作り

学びを進める　「学びの構成」 にある。

その願いは、誰もが様々な現実データに出会って、「そのデータから適切な意味を引き出す」ことができることにある。

演習１：賽Bのデータから集計し、結果を解釈せよ。

演習２：100円硬貨で買いに来る客が50円硬貨で買いに来た客の半分とした時の賽Cのデータ作成と演習１に倣って解け。

釣銭枚数変動シミュレーション(右表賽Aの場合)

客No.	50	100	釣銭枚数	客No.	50	100	釣銭枚数
1		2	99	51	6		83
2		1	98	52		3	82
3	6		99	53		3	81
4		3	98	54		4	80
5	6		99	55		1	79
6	6		100	56		1	78
7		3	99	57	6		79
8		3	98	58		1	78
9	5		99	59	5		79
10	5		100	60	5		80
11	6		101	61		4	79
12		2	100	62		3	78
13	5		101	63		3	77
14		1	100	64		4	76
15		1	99	65		1	75
16	6		100	66		1	74
17		3	99	67		4	73
18		3	98	68	5		74
19		4	97	69		1	73
20		2	96	70	6		74
21		4	95	71	6		75
22		2	94	72		2	74
23		2	93	73		1	73
24		2	92	74		2	72
25		1	91	75		4	72
26		4	90	76		2	70
27	6		91	77	6		71
28	5		92	78		4	70
29	6		93	79		2	69
30		4	92	80	5		70
31		3	91	81	6		71
32		1	90	82		4	70
33	6		91	83	6		71
34		4	90	84		1	70
35		3	89	85		2	69
36		4	88	86	5		70
37		1	87	87		2	69
38		1	86	88	6		70
39	6		87	89		4	69
40		2	86	90		1	68
41	5		87	91	6		69
42		4	86	92	5		70
43		4	85	93	6		71
44		4	84	94		2	70
45		3	83	95		3	69
46	5		84	96	6		70
47	5		85	97		1	69
48		4	84	98		2	68
49		1	83	99		2	67
50		4	82	100		2	66
出現数	16	34		出現数	17	33	

＜独自データ記録＞

回	賽A	回	賽A
1	2	51	6
2	1	52	3
3	6	53	3
4	3	54	4
5	6	55	1
6	6	56	1
7	3	57	6
8	3	58	1
9	5	59	5
10	5	60	5
11	6	61	4
12	2	62	3
13	5	63	3
14	1	64	4
15	1	65	1
16	6	66	1
17	3	67	4
18	3	68	5
19	4	69	1
20	2	70	6
21	4	71	6
22	2	72	2
23	2	73	1
24	2	74	2
25	1	75	4
26	4	76	2
27	6	77	6
28	5	78	4
29	6	79	2
30	4	80	5
31	3	81	6
32	1	82	4
33	6	83	6
34	4	84	1
35	3	85	2
36	4	86	5
37	1	87	2
38	1	88	6
39	6	89	4
40	2	90	1
41	5	91	6
42	4	92	5
43	4	93	6
44	4	94	2
45	3	95	3
46	5	96	6
47	5	97	1
48	4	98	2
49	1	99	2
50	4	##	2

＊疑問１）については、モンテカルロ法を紹介した Rao の「複雑な図形の面積を求める方法」に沿って乱数を導入したもの、とだけの回答だけでいいだろう。

＊疑問２）については、疑問１）にも関わるが、一つの解法に固執させようとするのは、日本の学校数学（ひいては指導要領の拘束性）の根本的な誤りであって、欧米の教育史上で大きな足跡を残したホワイトヘッドが、当時の欧米教科書の単元の恣意性を綿密に批判し、「学びは本来、単元間のつながりを学ぶことであり、関連性を見つけることであって、完成された出来合いの知識を吸収することのなかには、学びの喜びはない」と、その教育のあり方に一石を投じ大きな改革に至ったことに注目し反省すべきである。

＊批判１）については、これまでの本文並びに注から回答は見えるだろうが、方眼に碁盤型か将棋盤型のどちらを使うかは対象とする事象により異なるのは当然。注７、注３，９に尽きるのだが、どこまでの多数回実験で信頼に値するかというモンテカルロ法の「精度と評価」を早く導入」するカリキュラム改革の実現で一挙に解決する。

＊誤解１の「面積と確率は関係無いのでは？」、疑問１への回答に同じ。決定論的問題をも乱数（確率）を用いて解決しようというのがモンテカルロ法の歴史的位置づけ。決定論的立ち位置からの判断は改めるべきで、＊誤解２の回答を含め III. の大見謝氏の証明に委ねたい。

Ⅲ．２つの求積法は数学的に同一か？

モンテカルロ法によって遊園地の池の面積を求めたが、遊園地と池の形を模した紙の重さで面積を求めた値を真の値としてモンテカルロ法の値が正しいかを評価していた（年報論文４「数楽５」別解参照）。

そこで、今回用いたモンテカルロ法と型紙の重さで面積を出す方法の違いを考えてみた（大見謝氏）。

＜証明はじめ＞

Ⅲ-１．紙の重量比で求積する方法

わかりやすいのが型紙の重さで面積を出す方法だ。これは、使う紙の単位面積当たりの重さ（面密度σ（x, y））が一様だと「仮定」して面積を求める方法だ。面密度が一定（σ（x, y）＝A）だと紙の面積ｓと重さｍの間に次の関係が成り立つ。

$$m = \iint_S \sigma(x,y)\,dxdy = A$$

$$\therefore m = AS$$

遊園地の型紙の重さm_aと面積S_a、池の型紙の重さm_pと面積S_pとして上の関係を用いると池と遊園地の重さの比m_p/m_aは

$$\frac{m_p}{m_a} = \frac{AS_p}{AS_a} = \frac{S_p}{S_a}$$

となりそのまま池と遊園地の重さの面積比S_p/S_aになる。

III-2. サイコロを用いて求積する方法

次にサイコロで求めた方法を見ていく。０から９の値を持つサイコロ２つ（硬貨１０枚の表裏で代用しても良い）を同時に振ると 100 通りの組み合わせがランダムで出る。サイコロ 2 つを 100 回振って同じ組み合わせが出た回数を数えて縦横 10×10 のマスに記録する（マスに書かれた数を値$\alpha(x,y)$とする。x, yは行と列の番号である）。そして 100 マスの正方形を遊園地として中に池を書く。池に被ったマスの値の合計$\beta(S_p)$と、遊園地全体のマスの値の合計$\beta(S_a)$の比$\beta(S_p)/\beta(S_a)$をとる、というものである。ここで$\beta(S)$とは領域 S で囲まれたマスの値の合計を意味する。

$$\beta(S) = \sum_S \alpha(x,y)$$

$\beta(S_p)$と$\beta(S_a)$の比は、上の式を使って

$$\frac{\beta(S_p)}{\beta(S_a)} = \frac{\sum_{S_p}\alpha(x,y)}{\sum_{S_a}\alpha(x,y)}$$

と書ける。

これを実際の面積比S_p/S_aに近づけるなら、できるだけマスを細かくし全てのマスの値$\alpha(x,y)$をできるだけ均等にする必要がある。これはできるだけ多くの数字の出るサイコロ（乱数）を用意してマスを増やし、サイコロの振る回数をできるだけ多くして出る目の偏りを小さくすることで達成できる（注８コンピュータとの併用参照）。

サイコロを振る回数ｎとサイコロの目の種類 l を無限大の方に極限をとるとマスの大きさが微小面積となり面積分が使えるようになる。

$$\lim_{n\to\infty l\to\infty}\beta(S) = \lim_{n\to\infty l\to\infty}\sum_S \alpha(x,y)$$

$$= \iint_S \alpha(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_S \{B + \delta_B(x,y)\}\,dxdy$$

となる。ここでＢは全領域$S_{\hbar}$内のマスの値$\alpha(x,y)$の平均

$$B = \frac{\iint_{S_{\hbar}} \alpha(x,y)\,dxdy}{S_{\hbar}}$$

であり、$\delta_B(x,y)$は平均Bと座標(x,y)の値$\alpha(x,y)$のずれ（確率によるマスの値の偏り）である。

$$\alpha(x,y) = B + \delta_B(x,y)$$

また、マスの値の偏りは全領域でほぼ均等であり、任意の領域Ｓで

$$\int_S \delta_B(x,y)ds \cong 0$$

となるので下のような近似が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty, l\to\infty} \beta(S) = \iint_S B\,dxdy + \iint_S \delta_B(x,y)\,dxdy$$

$$\cong BS + 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty, l\to\infty} \beta(S) \cong BS$$

よって

$$\lim_{n\to\infty, l\to\infty} \frac{\beta(S_p)}{\beta(S_a)} \cong \frac{BS_p}{BS_a} = \frac{S_p}{S_a}$$

というように工夫すればモンテカルロ法でも面積比S_p/S_aの正確な近似を求めることができる。

III−３．二つの方法を比較

ここで、重さの比m_p/m_aとサイコロを使ったモンテカルロ法で面積比を求めたときの違いは数式を見比べると、紙の面密度$\sigma(x,y)$とマスの値$\alpha(x,y)$のどちらを面積分しているかだけである。紙の面密度$\sigma(x,y)$は一定Ａだと仮定して計算したが、マスの値$\alpha(x,y)$は場所によってわずかにズレ$\delta(x,y)$があるがほぼ一定の値Ｂである。ここで重要なのが面密度を一定だと仮定したことである。実際の紙は数え切れないほどの原子（おおよそ 10^{24} 個）でできており、それらの原子が均等に規則正しく整列しているわけではない。つまり、厳密には面密度$\sigma(x,y)$は一定ではないのだ。面密度の偏りは原子の分布の偏りであり、我々にとってその偏りは電子顕微鏡などで詳しく調べない限り確率で表すしかないだろう。ということは面密度$\sigma(x,y)$も平均がＡだとして確率による各点(x,y)でのずれを$\delta_A(x,y)$とすれば

$$\sigma(x,y) = A + \delta_A(x,y)$$

と書けるので、マスの値

$$\alpha(x,y) = B + \delta_B(x,y)$$

と全く同じ形になる。このことからサイコロで決めたマスの値$\alpha(x,y)$は現実世界の面密度$\sigma(x,y)$と全く同じ役割を果たしていたことが分かった。

III−４．結 論

以上から二つの方法の違いは、用いるパラメータが違うということだけである。どちらのパラメータも確率に依存する性質をもつ値であり、実は二つの方法は根本的に同じものであることが分かった。現実世界で紙の重さを使って面積比を求める方法は紙を構成する原子の分布という不確かな確率を使ったモンテカルロ法の一種とみることもできると考えられる。

＜証明終り III の下線は大見謝氏＞

III−５．発展させる

この項も続いて大見謝氏の寄稿だが、年報論文４の「３」成長（退化）と隆盛・飽和から周期、カオス運動へ　＊数楽７）『サイコロ振りの実験３−成長曲線−』に同じ。

このサイコロ実験は、あるＮ個のサイコロを同時に振って１の目が出たサイコロの数Ｋの（100−N）％の数のサイコロを加えて、またサイコロを同時に振るというのを繰り返す実験だった。実際はサイコロの数を１個で始めて 82 個に増えるまで繰り返し行った。

この実験で、サイコロは毎回 1/6 の確率で 1 の目が出るとし、サイコロの数を整数に限定しないとして数式化してみる。

試行回数ｎ回目の全体のサイコロの数を数列a_nとして漸化式で書くと

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{6}a_{n-1}\left(\frac{100-a_{n-1}}{100}\right)$$

となる。試行回数ｎ−1 からｎになるとき、サイコロの数の増加量$a_n - a_{n-1}$は

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{6}a_{n-1}\left(1 - \frac{a_{n-1}}{100}\right) \quad (1)$$

と表される

上の式は漸化式だが、このように数が推移する方程式はロジスティック方程式と呼ばれている。その一般式が次のようになる。

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2)$$

サイコロの増加(1)式と比べると酷似していることが分かる。

この方程式のグラフ（ロジスティック曲線、成長曲線）は自然界や市場でよく見られ、実際に使われている応用例を調べてみた。

その一例が漁業にあった。水産資源は魚や貝などの生き物である。生き物の個体数は繁殖により自然増加するが、この自然増加dNはロジスティック方程式に従うという。

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

ここで、N：個体数、t：時間、r：内的自然増加率、K：環境収容力である。

この自然増加に加え、人が漁で捕獲する個体数（漁獲量）Y を考えれば水産資源の増加率$\frac{dN}{dt}$は

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Y$$

となる。持続可能な漁業のためには、人間による漁獲量が漁獲対象の自然増加量を上回らないようにする必要がある。

自然増加の量と漁獲量 Y が釣り合っているとき$\frac{dN}{dt} = 0$で資源は一定に保たれる。このときの漁獲量 Y_0が持続生産量を示している。資源量 N によって自然増加量は変化し、持続生産量も変化する。最大持続生産量Y_Mを知るためにまず自然増加量の最大を調べる。

個体数Nによる自然増加量の変化は

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{2N}{K}\right)$$

であり、$N \le \frac{K}{2}$までは自然増加量は大きくなり、$N > \frac{K}{2}$からはだんだん小さくなる。よって$N = \frac{K}{2}$のとき自然増加量は最大$\frac{rK}{4}$になる。つまり、最大持続生産量は$Y_M = \frac{rK}{4}$である。

自然界は上の式のように単純ではなく環境収容力 K やすべての個体数 N を知ることも難しいが上のロジスティック方程式のモデルでは持続的にたくさんの漁獲量を得たいときは個体数が環境収容力の半分 K/2 になるように漁をすればよいことが分かる。

授業中のサイコロが魚だとすれば、環境収容力Kが 100 なので常にサイコロの数がK/2 の 50 個になるように捕っていけばたくさんのサイコロを手に入れることができることになる。

「数楽６　大見謝氏紹介」　サイコロを魚に見立てて漁業ゲームを作り、子ども達に成長曲線を学ばせてみるのも面白いかもしれない。

年報論文４「数楽7」とIII－５.発展させる　の内容をさらに拡張すると、次のIV.大数の法則が成り立たないカオス現象が出現する[14]。（筆者）

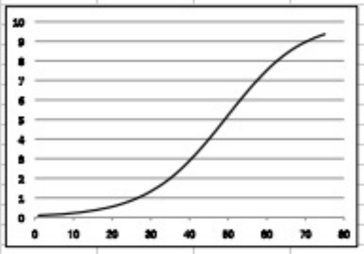
IV. 偶然と必然を結ぶカオス

＜生物現象のシミュレーション＞

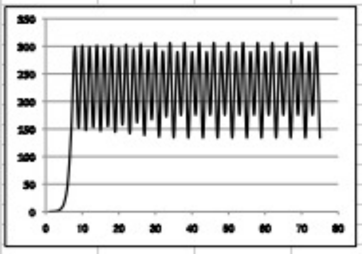
統計データが増えても安定しない例をあげる。

ある生物現象を表す微分方程式を解くために（高校で習っていた当時なら）差分化し差分方程式をサイコロシミュレーション（ランダム現象）で再現、この一部データ数値を多数回のサイコロシミュレーションの代わりにコンピュータシミュレーションするとカオス現象が出現する。

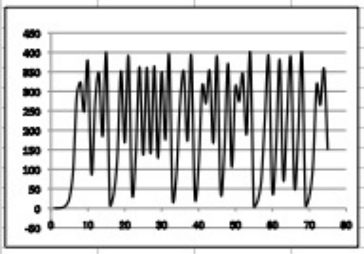
右グラフ（上）は、微分方程式　$dP/dt = AP - BP^2$ を差分方程式にしたサイコロシミュレーションで得られた成長（S字）曲線のグラフを表す。



ここで P はある生物の数、Aは生物の繁殖の程度に比例する量10、Bは餌不足、環境悪化（魚なら排泄物によって）などの量1、時間刻み幅Δt=0.01、初期値 P_0= 0.1で差分化。



グラフ（中）、生物の繁殖によってＡ=250に変化したとき、綺麗な周期運動を示している。この解析はまだ可能。



Ａ＝300に変化させたグラフ（下）は、法則性が読み取れないカオス状態。

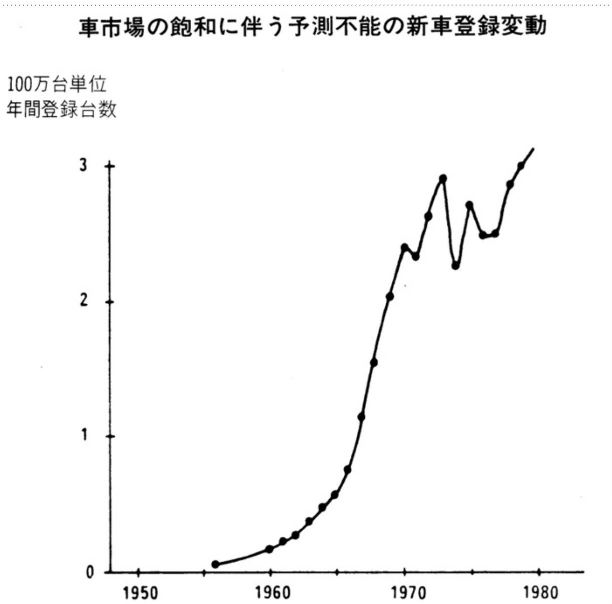
カオスは短い時間の変化は比較的単純な微分方程式（あるいは差分方程式）によって表現できるという点で完全に決定論的であるが、長期の変動は初期条件の微細な変化によって大きく変わるという点で偶然的である。それはある意味で必然と偶然とを結びつけるものであり、きわめて多彩な様相を示すが、現実の物理的、生物的、社会的システムをそのモデルによって理解することは今後の課題である（後で引用の数理統計学の竹内啓氏）、と言うが筆者と学ぶ多彩な専攻の受講生たちはそれぞれの専門から興味深くこの成長曲線をめぐって調べレポートする、生物の個体数、新製品の販売数、プログラムのバグ発見数など、人工物から生物・生化学現象までその成立するところは多岐に亘る。当初は少なく、中途で大きくなり、その後また少なくなるような現象は多くあり、それを時間の推移と累積

量をグラフにすると成長曲線を描く。そのすべてがカオス現象になるわけでなく、なるかどうかは事象毎にその都度判断しなければならない。

＜社会事象に現れるカオス現象＞

生物界で例示したが、そもそもカオス現象を最初に体験したのは、ワットの蒸気機関の発明が鉱山のポンプや巻き上げ機の能力を増大させたところから、蒸気機関の大きさを改造してさらなる増産を目論んだ産業革命黎明期の製造業が、増産体制を整えたある時期からいたる所の鉱山で故障するカオス状態が出現したと言われている。

現代社会でも飽和に伴うカオス状態は観ることができる。次図は日本における自動車産業の新車登録年間台数の例である。



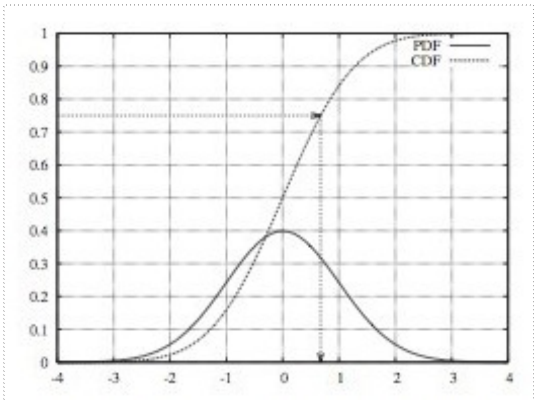
車登録年間台数はあるところまでは成長（S字）曲線にかなり沿って上昇を続けている。しかし、第二次のカーブに入ってから変動が始まっている。この変動はすでにかなり増え続けたところで起きているので全体の使用台数にはさほど影響を与えていない。日本もたいていの西洋諸国のように自動車のニッチは飽和に達しているのである。新車登録は主に買い換えである。不況や困難な時代には人々はいまのクルマで我慢する。

第二次大戦の時アメリカでも新車登録台数は激減したが、必需品である現在、使っているクルマの数はそれほど減らなかったという。

新車登録の変動にもかかわらず、クルマの寿命は普通の環境では安定しており、元のＳ字型曲線にしっかりとリンクしており、この成長（Ｓ字）曲線に沿って最初にクルマのニッチが一杯になる。この事実は経済的条件を考慮に入れなくともクルマの需要予測を出すやり方を示唆している。クルマの寿命が一定なのだから、新車登録台数を最初の保有台数が減った分だけ買い換えとして計算できる。

日本の場合このように計算したところ、限界区域での変動を除けば図のようなデータ・パターンがうまく出たのである。

成長（S字）曲線は下図、正規分布曲線を累積度数分布にしたもの。したがって、生物現象のグラフや車市場のカオス状態の出現は正規分布が成り立たないことでもある。



確率密度関数 (PDF) と累積確率密度関数 (CDF)

「大数の法則と平均の時代」はもはや終わり、「大数の法則に支配されない偶然と“折り合う”ことが現代の課題」という竹内　啓『偶然とは何か～その積極的意味～』（岩波新書 2010.9）の視点を欠く指導要領が、大数の法則を必然とする観念を刷り込んできたのではないだろうか。

V.　不確実性下における統計的意思決定

～ありえない事象の反復・再現実験？～

本稿では、「つづり方やかけ算から教育を受け始めた子どもたちは、世界は決定論によって支配されていると考える。また、答えは１つで一方が正しく、一方が間違っていると考えるように学ぶ」(OECD/PISA) という現在の数学教育から脱し、変動を予期し快く立ち向かえる子どもを育む決定論・非決定論を正しく融合させた新しい「数理リテラシー」教育の一面を見ていただいてきた。

これまでもっぱらモンテカルロ・シミュレーションの教材を題材に、現行学校数理とは別に「数理リテラシー」教育を強調してきたのは何故なのか？　特に、ここ V.の副題、「ありえない事象の反復・再現実験？」とは何を指すのか。以下、後者・前者の順に書き、終える。

V-1. 大危機を免れる確率計算と多重安定システム

“反復・再現実験”とは、他の人が行った実験を後から同様に試みること、粗っぽいですが、「これを通じて行う科学的営み」の体験です。ところが「ありえない」事象の

“反復・再現実験”となれば、巻末注２）で「今ない不確実」事象とか「ブラックスワン」事象と同義としたことから、これまでの決定論的世界観を植え付けてきた教育からすると、“教育対象外の事象の反復・再現実験”を行うこととなり、ノーベル経済学者 E.スティグリッツをして、米国の金融恐慌と東日本大震災後の『原発事故と金融危機に共通するギャンブル性』[11]において「ブラックスワンはまれな出来事ゆえにリスク管理できない」と言わしめていたが、現在はそれを許さない状況にある。

どういうことかというと、実は、確実でなくて、起こるかもしれず起こらないかもしれない出来事や結果であるこの「不確実」事象は私たちの周囲では頻繁に起こっている。矛盾に思えるかもしれず、考えれば考えるほど起こりそうにないのに、いったいどうやって次々起こるというのか？　これが矛盾でないことは数々の実例が示している。例えば、幸運にもロトに一度ならず当たった人がいる一方、運悪く雷に何度も打たれた人が何人もいる、あろう事か広島と長崎で二度被爆した人もいる、そして桁外れの金融危機が繰り返し起こり、さらに地震が群発している[13]。

しかし、教育で為すことは、何も感染症や地震に原発事故を“反復・再現させる”ことを意味しているのではなく、OECD／PISA に代表される世界の教育改革の潮流の下、日本の教育スタイルの基調を「これを通じて行う科学的営み」を体験させる数理リテラシー教育への転換が迫られているのであり、そんな事象・出来事を正しく「見積もる」ための数理リテラシーの養成と、「ありえない」出来事の被害から免れる行動の数理リテラシー教育をめざすことへの転換が求められているのであり、そのためには「ありえない」事象の反復・再現実験を可能にするという逆説的な課題の探究が待たれていることを意味する。

筆者の年報論文４と本続編の「数楽＊」で紹介してきたモンテカルロ・シミュレーション教材は、他にもたくさんあり、テーマだけ書いても熱力学の「熱平衡状態の達成過程のシミュレーション」や「隆盛か没落かという社会事象のシミュレーション」など。

しかし、ここは大数の法則が成立しないカオス現象の前に立ち往生した学生に因んで、竹内　啓氏前掲書の「きわめて稀な現象」に対処する「科学的営み」から学びたい。

＜要約引用始め　P201～P209＞

もしそれが発生すれば莫大な損失を発生するような、絶対起こってはならない現象に対しては、大数の法則や期待値にもとづく管理とは別の考え方が必要である。

大きな危険が人間の行動によって引き起こされる可能性がある場合には、その確率がきわめて小さく、実際には起こりえないといえるようにしなければならない。原子力発電所のメルト・ダウン事故や、全面核戦争などは典型的な例である。

原子力発電所のメルト・ダウン事故の発生する確率は１年間に百万分の一程度であり、したがって「１年あたり期待死者数」は１であるから、他のいろいろなリスク（自動車事故など）と比べてはるかに小さい」というような議論がなされることがあるが、それはナンセンスである。そのような事故がもし起こったら、いわば「おしまい」である。こんなことが起こる確率は小さかったはずだなどといっても、何の慰めにもならない。

なすべきことはこのような事故が「絶対起こらないよう（一億分の一、あるいは百億分の一というような小ささ）にする」ことであり、そのうえでこのようなことが起こる可能性は無視することである。

このようにいうと、小さい確率であってもまったくゼロではない限り、それを無視するのは正しくない。したがって、巨大事故の確率がゼロであるといいきれない限り、原子力発電所は建設すべきではないという議論が出されるかもしれない。

しかし、個人でも人々の集団でも、あるいは一つの社会、国、さらに人類全体でも、その生存を脅かすような危険性はいろいろ存在するのであって、それらの確率は決してゼロではない。それらが人間の行動によって起こされる場合、あるいは逆に人間の行動によって防止できる場合、その確率をできるだけ小さくするように努力しなければならないことはいうまでもない。しかし、その確率を完全にゼロにすることは不可能であるかもしれない。

そこである事象がおこる確率がきわめて小さくなるようにするには、いくつかの事象が同時に起こらなければその事象が起こりえないようにしたうえで、それぞれの個別事象の起こる確率を検証可能な小さい水準に抑えるという多重安全システムの基本的な考え方である。

しかし、実際に一億分の一あるいは百億分の一という確率を検証することは不可能である。そこで重要なのは

> 互いに無関係な二つの因果関係によって起こる二つの事象が同時に起こったときにのみ起こる事象の確率は最初の二つの事象がおこる確率の積（掛け算）であるという法則（確率の乗法法則）である。

このことは

> 互いに無関係な因果関係によって生じる事象は、確率的に独立である

ということを意味している。もちろんこのことが正しいという論理的保証はないが、しかし二つ以上の因果関連

を別々に考えることができるということは、実はその生み出す結果が独立であるという仮定を含んでいると考えられるので、現実的な行動原理としては妥当というよりも、むしろ必要である。

そうして一つの安全システムが失敗する確率が千分の一の互いに独立なシステムを四重に設けておけば、全部が失敗して大災害が現実化する確率は

(1/1000) (1/1000) (1/1000) (1/1000)

=1/1000000000000= 0.000000000001

となって、これは十分小さくて事実上ゼロといえるであろう。

しかし、数値 0.000000000001 より重要なのは、互いに独立なシステムを四重に設けること。

＜要約引用終わり＞

■電源喪失後の原子炉のできごと

米国のシミュレーション		福島第一原発１号機	
運転停止 8時間後	燃料露出、水素が発生開始	12日午前10時ごろ？	燃料露出
10時間後	燃料が溶け始める	同日正午ごろ	注水も水位低下
11時間半後	燃料棒が崩壊	同日午後３時36分	原子炉建屋で水素爆発
12時間後	圧力容器中の水が干上がる	同日 午後６時半	水位が下がって計れなくなる
12時間 15分後	圧力容器が損傷	圧力容器がすでに損傷している可能性を東電が認める（３月28日）	
13時間半後	格納容器が損傷		

この観点から福島原発事故を巡る統計データ（地震・津波・電源喪失・防波堤）を検討して見よう。

＊M９．０の大地震 ；（参考）宮城県の防災ホームページには地震調査委貞会の発表を受けて，宮城県沖地震発生確率が掲載されていて、宮城県沖で発生する M7.5～8.0 クラスの地震が 99%の確率で 30 年以内に発生するとある（2005 年１月１日～）

＊１４ｍの大津波；（参考）40 年前に建設された東電の福島第１原発施設は太平洋に面した地震地帯に立地しており、その地域は過去 400 年に４回（1896 年、1793 年、1677 年、1611 年）、マグニチュード８あるいはそれ以上と思われる巨大地震にさらされている。こうした歴史的なデータも踏まえて、東電の原発専門家チームが今後 50 年以内に起こりうる事象を分析し、４年前国際会議にて報告、13 メートル以上の大津波は 0.1 パーセントかそれ以下の確率で起こりうる。そして、高さ 15 メートルを超す大津波が発生する可能性も示唆。さらにリポートでは「津波の高さが設計の想定を超える可能性が依然としてありうる」と指摘。

＊電源損失 ； 下表「電源喪失後の原子炉のできごと」は、全電源喪失のシミュレーションを米国が 30 年前に行っていて、福島原発事故がシミュレーション通りの経緯を辿ったことを示す。送電線早期復旧と考えた日本は想定しなかった。

＊防波堤 ；福島第一原発の津波防波堤は想定の２倍を超える津波に襲われ、被害が拡大した。日本原電東海第二は’04 年のスマトラ沖地震を受け昨年 10 月までに改修完了した部分は今回被害を免れた。

以上から、福島原発は尽く無防備であったと言って差し支えない。その上、仮にそれぞれが 1/1000 であったとしても、予想だにしていなかった最初のM9.0 の大地震が起こりそれが他の３つに波及し連鎖反応的に機能しなくなってしまったのであった。つまり、確率的に独立ではなかった。

また、現実にきわめて高度の安全性が保証されていたシステムが大事故を起こしてしまった場合には、実は、何重にも設けられていた安全システム（多重安全システム）が実際には互いに独立でなく、共通の一つの要因によって同時に機能しなくなってしまっていた場合が多い（その最も明白な例は、そこで働いている人々が安全ルールを守らなかった場合である）。このような意味から、福島原発事故は人災の何ものでもなかった。

2026. １追記：中部電力・静岡県浜岡原発で昨年11月に続いて不正発覚。安全性データを都合良いデータにお置き換えるガバナンス不全露呈。

V-2. 原発再開２段階ストレ静岡県・ス・テストは多重安全システムの要件を満たしているか？

したがって、２段階ストレステスト（「定期点検中の原発には簡易版のストレステストを適用してそれにパスしたものの再稼働は許可する。ただし、その後本格的なストレステストを稼働中の原発すべてに適用し必要に応じて停止命令を出す」‘11.7.11 政府統一見解）が、稀なしかし起こつてしまったらきわめて重大な結果をもたらすような事故を防ぐ意思決定が有効であるためには

＊事象の起こる確率の乗法法則が成り立つ条件を確保してあるか？

＊それぞれが起こったときに被る損失（多重安全システムが実際に互いには独立でなく、共通の一つの要因によって同時に機能しなくなってしまう）恐れの評価という二要素が考慮され、さらに、その上、そこで働いている人々が安全ルールを遵守すること。

そこで、報道されているストレス・テスト例を見てみると。建物の地震に対する安全性の余裕度は、

⑴ 設計上耐えられる変形の量

⑵ それを超えるが問題ない量

この⑴, ⑵まで調べるのが1次、

⑶ 建物が倒れる限界の量を調べる

この⑶までが２次、１次は停止中の原発の再起動の条で、首相や関係大臣が判断する、というものだった。

■原子力施設への軍事攻撃を巡る動き

1981年６月
イスラエル空軍がイラクの原子炉を爆撃、破壊

82年６月
鈴木善幸首相が国連軍縮特別総会で原子力施設の安全確保を訴える

84年２月
外務省委託の「原発攻撃シナリオ」の報告書まとまる

85年９月
国際原子力機関（ＩＡＥＡ）総会で原子力施設への軍事攻撃禁止決議

87年11月
イラクがイランで建設中の原発を攻撃

88年６月
四国電力伊方原発近くに米軍ヘリが墜落

91年１月
米軍が湾岸戦争で「イラクの原子炉に決定的損傷を与えた」と発表

2001年９月
米同時多発テロ

11年２月
ＩＡＥＡが原発を狙ったテロへの核セキュリティー対策強化を勧告

３月
東京電力福島第一原発で事故

５月
欧州連合（ＥＵ）が原発のストレステストでテロ攻撃を対象に

６月
原子力委員会が原発テロ対策強化のワーキンググループ設置を決定

右表は、原子力施設への軍事攻撃を巡る動き。右上表は、1981年のイスラエル軍の空爆を契機に1984年外務省が行った原発攻撃の極秘予測。

報道されているストレステストは地震対策。ストレステストは最低でも１カ月以上かかり、２次はＥＵのテストを参考にすれば、国の評価まで約7ケ月かかる。

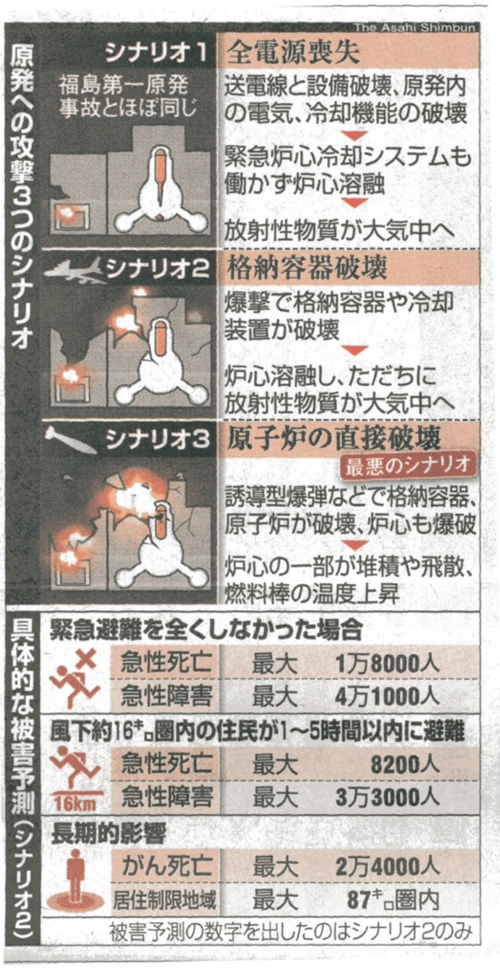
この期間中に８８年６月の伊方原発近辺ヘリ墜落の事態や２００９年４月テポドン失速墜落があったように原発への墜落命中という事態もなきにしもあらず。

日本における地震はドイツでは飛行機墜落事故を想定し、「もし旅客機が原子力発電所に落ちたらどうするのか」というドイツの方々の数理・統計的視点が、「われわれは原子力を捨て、再生可能エネルギーあるいは他のエネルギー源へシフトできるかどうかが問われている」と政策変更したのであった。

（2025．9追記：2022年以降のウクライナ侵攻したロシアの原子力施設への軍事攻撃と、2024年以降のイスラエルのガザ侵攻とそれを支援するアメリカのイランの原子力施設への公然とした軍事攻撃は別次元に悪化している。

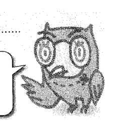
列島各所に原発をシフトし、その上空を得体の知れない飛来物が飛んでいる日本という国、多重安定システムという視点から見ると明らかにドイツの思慮深さを欠いている。）

次に、大地震と大津波と福島原発事故の一つ一つが生ずる確率が少なかったとしても、大地震一つから大津波



ニュースがわからん！

ストレステストって、何をするの？



災害や事故に原発が耐えられるか計算するんだ

アウルさん　原子力発電所の「ストレステスト」ってどんなものなの。

A　めったに起きないような自然災害や事故が起きた場合に生じる負荷（ストレス）に、原発がどこまで耐えられるか、安全性の余裕を調べることだ。「テスト」と言うけれど、実際にはコンピューターによる机上の計算が主だ。

ア　最近、原発の記事でよく見かけるのはなぜ。

A　きっかけは東日本大震災で起きた東京電力の福島第一原発の事故だ。事故の後、欧州連合（EU）が、原発が地震や洪水などにどこまで耐えられるかを確認するテストの実施を始め、日本でもやることを決めた。

ア　何が目的なの。

A　事故後、各原発は非常用電源車を用意するなど応急対策を取ったけれど、それによって、安全基準にどの程度の余裕ができたかを調べるんだ。

ア　どうやるの？

A　テストは2段階ある。1次評価は定期検査で止まっている原発が対象。2次評価は福島第一、第二原発を除く商用原発44基などが対象。稼働中の原発は止めずに実施する。いずれも電力会社の報告を国が評価、確認する。

ア　1次評価と2次評価は具体的にどう違うの？

A　たとえば建物の地震に対する余裕度は、①設計上耐えられる変形の量②それを超えるが問題ない量③建物が倒れる限界の量を調べる。②まで調べるのが1次、③までが2次だ。1次は停止中の原発の再起動の条件で、首相や関係大臣が判断する。

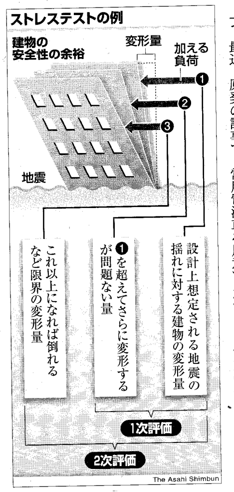
ア　時間がかかりそう。

A　最低でも1カ月以上かかるな。2次はEUのテストを参考にすれば、国の評価まで約7カ月かかる。

ア　結果は信頼できる？

A　計算結果は最初に打ち込むデータ次第。データを間違えないように点検するのは当然だけど、都合のよいデータだけを使っていると疑われないように情報をしっかり公開することが大事だ。

（小堀龍之）



2011・8・2

■この欄で、ききたい質問をお待ちします。wakaran@asahi.com

が起き、原発を機能不全に陥らせたように、それぞれが互いに独立ではなかった。ドイツが考えるように、飛行機墜落事故と原発事故も互いに独立ではない。

３つ目に、結果は信頼できるか？　というと、計算結果は最初に打ち込むデータ次第。データを間違えないように点検するのは当然だが、これまでのデータ隠蔽、データ捏造、「やらせ」質問、チェック機関としての保安院が推進していたなどの経緯を見れば、それに携わっている人々が安全ルールを守らないで都合のよいデータだけを使うことは十分にある。

Ｖ-３.斬新なマンデルブロの複数ランダム論

フラクタル数学のマンデルブロは、ランダムさには複数の「状態」もしくは型―古くから知られている物理学の基本的な物質の三態（固体、液体、気体）になぞらえて似たようなランダムさの三状態（マイルド、スロー、ワイルド）があるとし、この三つのタイプが金融市場で作用すると、価格はそれぞれまったく違う動き方をすること、そして１００年に一度の金融恐慌をもたらしたのは従来の正規分布盲信のマインド型では金融市場を解析してきた金融理論であったことを予測していた。「金融工学の基礎となっているのは、コインを投げて、表が出たら相場が上がり、裏が出たら下がるという最も単純なマイルド型のランダムさの変動をモデル化した概念であった」と。この従来のランダムとは別に、複数のランダムの提起である。ここではベル曲線（釣鐘型曲線）、つまり正規分布にしたがうことも批判している。

きわめて不規則に大きく変化し、予想が困難な「理不尽な動き」をする実際の相場には、従来の単純なマイルド型ランダムによる金融モデルに代えて、ワイルド型のランダムさに基づいて動いている市場の動きを説明しモデル化できるのは、「洪水」や「大気の乱流(タービュランス)」などを説明できるマルチフラクタル・モデルを適用すれば、いっそう信頼性の高い新しい体系の金融理論を打ち立てることが可能とした（『禁断の市場～フラクタルでみるリスクとリターン～』2004）。

一言で言うと、困難さの状況・条件に応じてランダム「レベル」の使い分けを教える確率・統計教育が大切なのであって、単純なランダム一辺倒の指導要領・教科書流は大学４年生にまで悪しき固定観念を与えているのである。

ランダムさに複数あるという説そのものが斬新ですし従来の統計的世界観をより豊かにできると思うと共に、正規分布を前提にした従来の確率手法の教育も構築し直す必要があると考える。

ところで、この「フラクタル観点は、理解すれば巨額の富を手にすることができる、というようなものではありません。しかし、高い確率で起こる相場の暴落により、巨額の損失を被ることを避けるためには、市場をフラクタルの観点から見るのが最も良い方法であると信じています」それを計算で対応できない、つまり「予知不可能」な事態として浮上していたのが、複雑多岐な株価チャートで「予知不可能＝破綻」が金融恐慌をもたらした。

マンデルブロは、従来のランダム概念では「予知できない」新しいランダム概念を提起したわけです。そこでは正規分布は前提できないと。竹内「偶然論」もそこにでてきたわけです。この「金融恐慌と福島原発事故の不気味な類似性を観る」という分析をしているWeb記事『原発事故と金融危機に共通するギャンブル性を紹介した。

しかし、マンデルブロたちは「予知不可能＝想定外」は許さないわけです。

コインを投げ、表が出たら相場が上がり、裏が出たら下がるというように確率的なものだと考え、コンピュータで乱数を作り出して相場取引を行うモンテカルロ法を指弾する（吉本佳生『金融工学マネーゲームの魔術』）声もある。

Ⅴ-３.の参考・引用文献
竹内 啓『偶然とは何か～その積極的意味～』（岩波新書2910）
マンデルブロ『禁断の市場～フラクタルでみるリスクとリターン～』（東洋経済 2004）
モーディス『予測学入門』（産能大 1994）
スティグリッツ『原発事故と金融危機に共通するギャンブル性』（ダイアモンド・オンライン2011）
朝日新聞、日本経済新聞、読売新聞、北國新聞ほか各紙

Ⅵ.不確実性時代の理数教育の担い手の素養
～　再考：数理リテラシー　～

2000 年のPISA 調査開始以前の理科・数学国際学力調査における知識・技能は世界のトップレベルを維持しながらも、日本の数理教育の内容や指導法が、それと引き換えにとんでもない状況を産みつつあることも明らかになっていた。それは、トップレベルの子たちの理科・数学への興味・関心・楽しみを摘み取り、意欲を削ぎ、学んだ以外の難問に挑むことを簡単に放棄、教科書を開きたくない、理科・数学なんて将来役立たないというように「数学嫌い」、「理科離れ」を助長する日本型教育スタイルの根源的実態が国際比較によって統計的に浮き彫りにされていた。その状況が、2025 年現在も同じであることを示した報道が去る７月にあった。「理科離れ」を象徴する日米中韓国際意識調査である[10)]。

これらから見えるのは、理科・数学の学力を云々する以前の「学び」の土壌と言って良い情意面が崩壊している事実が統計的に明らかにされていること、この傾向は当然ながらPISA 統計調査にも現れ全般的成績がトップクラスにもかかわらずレベル１未満の生徒の割合が 10%、上下格差の大きさも顕在化していた（注20 中のグラフ参照）。

こんな日本型教育スタイルが堆積させたのは読解リテラシーや評価・熟考・推論といった分野で課題があり、それが小・中・高校のテスト教育で慣れ親しんできた「４分間知識」教育と一体化した学力構築体制を考えれば、こちらの見直しも伴わなければならないことは言うまでもない。

翻って「数学嫌い」、「理科離れ」の増幅固定化に理系人材不足に陥っている日本型教育スタイル下の学校現場で果たして理数教育改造を如何に実現できるのか？

年報論文４に加え、V.以前に書いた具体的事象を対象にして数理リテラシーを育み進めた”教え＝学び”の活動から改善の方向を探ってきた。年報論文４の「数楽１」(「同符号の２数が綾なす不思議」でも、本稿の「サイ投げで琵琶湖の求積」のどちらでも良い)、そして本稿「数楽３　起伏の激しい福井県求積」のモンテカルロ法で乱数を用いデータ（数）を生成させ、(生徒ペア数だけ）反復実験することが可能であることにもお気づきでしょう。例では 72 回中 13 回でしたが他の例を挙げると、16,16,18,18,18,19,20 という結果でした。それぞれ Rao の方法にならって真値との差を求めたり統計的分析したりする。

多くの学び手たちの体験そのものが、ある意味反復実験してくれていることにお気づきでしょう。教室で行う彼らが繰り返す活動が産み出すデータこそが宝なのである。

そこで数学・理科とは別に、“数理”とか“現象の数式化”という用語（以降は数理）が使われてきた歴史的経緯に視点を移してみよう。多くある書籍から代表に２点挙げる。『数理のめがね』(坪井忠二 1968 岩波)と先に引用した約５00 頁の大著『数学モデル―現象の数式化』(近藤次郎 1976 丸善)である。

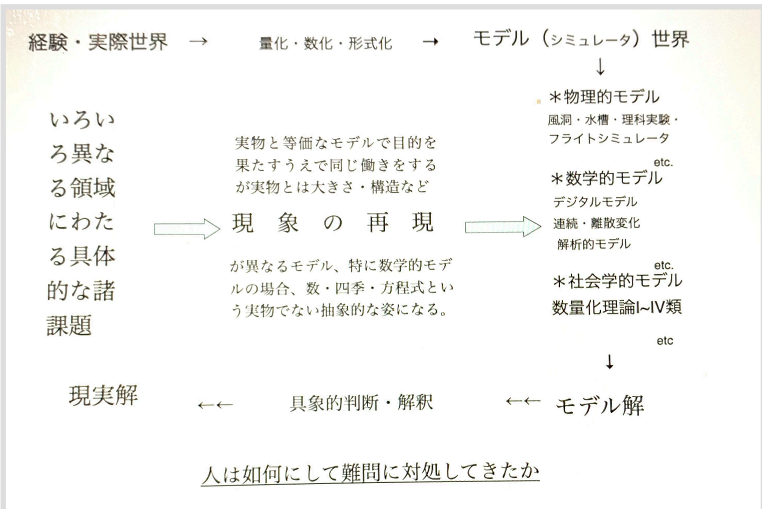
坪井が巻頭言「数理とは」において「数理と数学は違う」とする立場から「数理のみかた」を特集した雑誌『数理科学』（サイエンス社 1975）には「工学の数理」をはじめ、生物学、医学、経済学、情報等々、10 分野と多岐に亘る分野特有の「～の数理」が語られていた。教科書風算数・数学教育では公式を教える、だから忘れても、公式集を見れば載っている。だが、「現場の数理」では、それが経済学であれ、建築であれ、物理学であれ、公式集にそのままの形では出ていないような課題に直面するのが普通で、多くは従来型の学問領域の分け方では応えられなくなって諸問題を新たな学際・境界領域的取り組みが必要となる。それはOECD/PISA の「２つのプロセス」に反映されている(注18 のスライド参照）。筆者にも恥ずかしいほど内容のない、『質的データの数量化とコピュータによる統計解析』（1982 年 科研費 B）という研究があるが、IQ・偏差値の幻想と点取り競争が跋扈する教育現場における評価法と違えた質的データを量的な測度に変換（数量化という）する「教育評価の数理」の研究が目的だった。

坪井の著作から約 40 年後の 2009 年その名もズバリ『使える数理リテラシー』（杉本大一郎 勁草書房　下線は筆者)が出版された。杉本は、このまえがきで、PISA のリテラシーと日本のリテラシー用語の違いを、日本の「読み書き」リテラシー教育は、漢字を書いたり、計算練習をさせたりすることが中心になり、「それを使って何かを行う」ということが手薄になっている、と指摘し、例に「数理と外国語のリテラシーでは特に著しいようで、それらを長年習ったが、実用になる程度に使えない」ということが起こっている、と。

そこで日夜教育に携わる皆さんにお尋ねしたい。「貴方の教育実践、杉本が数理と英語に指摘されていたような状態に陥っていないか？」と。杉本はさらに、数学と数理リテラシーの違いは、「文脈」があるか無いかであり、特にデータによるとき、統計によるとき、それは数理リテラシーの領域である。実質、科学のステートメントは文脈依存型だから…（中略）…そこには数学ではなく、数理操作がある、と説く。翻って、小島実践におけるデータは単なる数を扱っているのでなく、「コイン投げで四匹の仔猫の性別の別れ」や「サイコロ投げでびわ湖の広さ」を求める文脈の中で、「確率の導入～数学の不思議～」を図った“データ（数）”でした。また、筆者が唐突に出したかに見えたであろう「数楽２」の「硬貨マジック」の種明かしにおける数や式、はたまた思考のプロセスまでもが、誰もが取り組め、自らの頭で考える“実用”を感じさせずにはおかないものでした。このように誰もが、当面する諸課題に対処する中で適切な「使える・役立つ」モデルを思考に活かす数理では、その一環に量・数概念の導入や各級数理手法も適宜使う。この「使える・役立てる」視点からすると現行の学校理数教育は具体性に欠ける。加えて、点取り競争に振り回されている。これは反省し、改めるべき事ではないか？

もっと厳しい言い方をすると、法的拘束性保護下、理数系専門家たちの指導要領内容は「教育の数理」としては無力でしかない。かつて I. ラカトシュが、数学では演繹主義的様式を通し、科学では帰納主義的様式を通して権威主義に陥っていると批判した。いずれも門外漢の学び手をその前で怯ませる日本の理数教育の専門性強要はラカトシュの批判に尽きるのではないか[12]。

「教育の数理」重視の数学教師を自認する筆者は、数学教育の基礎的成分として、幾何的・物理的直観、sense of fun（面白さがわかる）、sense of wonder（不思議さがわかる）と考え、数学と数学教師が殊更に強調する、抽象的・形式的な厳密さへの感覚の強調はその延長上ひとりで育つという立場から、注 15 の最少の原則に則って学校「理数の数理＝数理リテラシー」として理工学生向けの教育課程（過程）で講義してきた。本稿 I. ～III. の構成・展開も筆者の上記の数学教育観に沿って小島・大見謝両氏に実践を提供して頂き利用させて頂きました。



日本において「数学嫌い」、「理科離れ」が、特に顕在化した経緯を見ると、坪井著作と杉本著作の間の 40 年間に「数学と数理」をめぐる世相の変化があった。それは、坪井たちの時代の専門分野特有の“数理”的取り組みとは異質な”ちょっと軽めの柔らかい数学への需要とでも呼ぶに相応しいものだった。この背景には戦後経済成長により、かつては物理や工学の言語としてのみ考えられていた数学が銀行業務や社会科学その他の言語として多様な役割を果たす時代の到来、特にビジネス分野で、“数学とまでは言えない”役立つ数理需要が急拡大した世相がある。そしてその主な対象者は、他の面では教養があるのに、数や確率といった基本的な概念をうまく扱えない人たちが、数の氾濫する、テクノロジーに支えられた当時の社会で、数字・数学オンチという病気では困る、「なんとか治したい」と特効薬のワクチンを求め、それに出版界は『数式のない…』や『文系人間の…』はたまた『数学嫌いをなくす…』といった柔らかい書名を冠した本や週刊誌を店頭に並べた。しかし、この「ちょっと軽めの柔らかい数学・数理」本需要の世相や数字・数学オンチな学び手を産み出したのは、他でもない日本型教育スタイル、特に、1918 年の勅令以来の世界に類を見ない学校教育における文理組分けという学び手たちの分断と「数学嫌い」、「理科離れ」が生み出した暗記中心の「４分間知識」の蓄えが破綻となって顕れたのであり、これを撤回・修正し、数字・数学オンチという病気では困る、「なんとか治したい」と特効薬のワクチンを求める前向きな学び手・働き手に応えることこそ科学技術立国を唱える教育施策であるべきであろう。

すべての OECD 諸国のポジティビティ（積極性）を測定して、国のランク付け行っている財団「ポジティブプラネット」（代表ジャック・アタリ）は、女性問題で「未来の備え」を欠き、積極性を欠く最下位国の一つに日本を位置付けている。また、1959 年に現代の文理シナジーに連な

る『二つの文化と科学革命』（H.リード講演1965みすず書房）を巡る世界的大事件も日本型教育スタイルの文理組分け体制改変には繋がらなかった。いずれも法的保護下の日本型教育スタイルの後進性を示し、その後の「数字・数学オンチ」の世相に続き、「科学大国の落日・科学後進国ニッポン」「日本、置き去りするデジタル先進国」（いずれもNews Week）と揶揄されるに至る。

この指摘を揶揄と捉えるのは失礼なまっとうな警鐘なのかも知れない。科学技術立国を謳いながら「未来の備え」や積極性に欠け、黄昏に向かう国なのだから。しかし、この流れが許されるはずもなくPISA実施の読解リテラシーで一挙にその綻びが顕れ日本型教育スタイルの学力・リテラシー批判の前掲杉本指摘に連なる、「読解力　全教科で養成」（2005.10　東京新聞）と転換したが、時すでに遅く、数学読解リテラシー同様に、「使える・役立てる」読解リテラシーへの転換は成功したとは言い難い。もっと辛辣に言えば、こんな教育やそのカリキュラムを作ってきた専門家は、もはや「21世紀に生きる知識と技能」の教育を組織する資格はないのではないか。他方、現場教師たちは、そんな専門家の作った教育内容で点取り合戦させられることを拒否し、現場独自でPISAの本旨に沿い学び手たちの意向を受けた現場特有の教育内容を創造・実践し、1918年以来の日本型教育スタイルに引導を渡す努力に勤めてほしいものである。

PISAのスライド[20]に、数理リテラシーとPISAリテラシーを一望できる鳥瞰図をdaVinciMap（MindMap）で描いた。この鳥瞰図でいうと、日本の学校数学教育は、極論するなら、数学リテラシー群の技「問題の種類」の部分に該当する。特に、いわゆるテスト問題を観れば「問題クラスター」群の内の再現クラスターと関連クラスターが主なもので、難問の多い塾考クラスターの問題には、PISA調査の趣旨を履き違えた受験指導を受け、それに長けた15歳児たちは調査・応答を避ける傾向がある。「分野・領域」群の「量・不確実性」に該当する内容に乏しく、数学読解リテラシーに至っては校内研修で「数学で読解力をつけるとはどういうこと？」と筆者も数ヶ所講師に駆り出された。

そもそもPISAは、日本の教育界が考える点取り競争的な学力調査ではなく、OECD（経済協力開発機構）が21世紀に働く人たちの「21世紀に生きる知識と技能」の学習成果評価の一環としてPISA（15歳版）、AHELO（大学版）PAAC（社会人版）を実施していて、その本旨は「学校カリキュラムをどれだけ習得したかではなく学んだ知識やスキルを現実世界に適用できる能力」であり、それをリテラシーと呼んだ。言い換えれば、「知識やスキルが現実問題に活用できる形で習得されているか」「すぐ使える形で保持されているか」、そして「それを国の教育は実現してきたか」が問われているからである。

いつの時代にも、生活や仕事において大人、子供を問わず能動的に生活（遊び）し、その生活（遊び）を続けていくために何らかの意思決定（決断）をしなければならない。何ら困難を伴わない決断から多少のリスクがある決断、そして今回被災した能登半島（そして今、群発地震に見舞われているトカラ列島の島民）の人々のような危険な事態に遭遇する可能性が高い不確実に対する決断等々である。

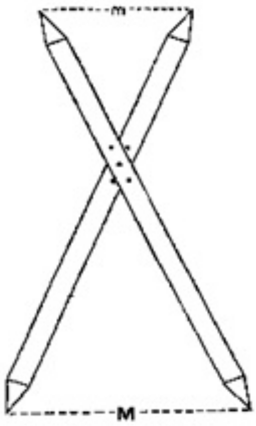
生い立ちや環境が異なった人々も、昔から直面した場面に応じ「巧みに・かしこく」解決してきた。その過程で直接には解決できない難問に遭遇したとき、「人は如何にして難問に対処してきたか」と「課題の本質」をいろいろなモデルで表現、そのモデルでもって考察を進め、いったんモデル解を求めそれでもって難問を解決するのに役立ててきた（前頁図参照）。

筆者は数学教育場面で様々な教育モデルを工夫してきたが、『今ない不確実…』[1]におけるモンテカルロ法の利用は決定論偏重の理数教育を非決定論的不確実性事象にも容易に取り組む端緒にできる教材として数理リテラシー教育の現代版に加えることを試みた。一方、古くは「ベキタイル」[18]（1973年 数x^nのｎがベキ 英語名Algebra Tiles次頁図）というものは、検索すればお分かりのように国内外で多く使われているが、殆どが中学生の因数分解用止まり、筆者の目的は文字や式の前で立ち竦む高校生に高次（x^n）式（多項式）の代数計算や公式の意味付与に開発したもので、俗にいう数式に弱い青少年用に役立つばかりか、暗記知識に強い青少年たちに公式暗記を止め、数・文字・式を縦横に使う代数“計算の組織化”にこそ真価を発揮させるものとして提起したものだった。

こうした現実の問題に対処する過程で人々が苦労して編み出してきた方法を青少年たちが継承できるようにする。見たことのない問題、出くわしたことのない場面に直面した時に、彼らがプロセスに則っていま所有する知識・技能を活用して「意思決定」を行い解決していく、これこそがOECD/PISA調査が15歳児に求めた能力であり、21世紀に生きて働く人々に求めていた知識・技能であろう。

筆者たちは教育場面で、さまざまな課題解決をめぐっ

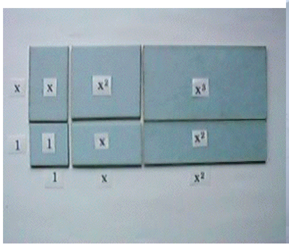
て、実物を作ったり、等価なモデルを作り・活かしてきた、その一環に数・量概念や数理手法を導入したり、定式化したりすることによって成果を上げ、「使える・役立つ」モデルを考案し思考に活かしてきた。この「使える・役立てる」視点で日本型教育スタイルの被害者たちとさまざまな形で従来の数学と学校数学を改造する方途を共に作ってきた。こうした状況の中で優遇されてきたかに見えた青少年たちは注 10 の統計データに現れたように惨憺たるものである。



しかしこんな状況でも教育過程の中で随時修正可能で、例えば、年報論文 4「数楽３、数楽４」において、人間の部位（目の間隔や関節）を測ったり、北斎画にある白銀比と黄金比の描画部分を測ったりした二分比・黄金比・白銀比を一本の竹ヒゴに体現した簡易コンパスは、物理的かつ数学的モデル。しかしこのアナログの簡易版コンパスは測るものによって自ずと限界がある。水道管破裂箇所やガス漏れ箇所探索にまで使えるようにするために、どのブラウザででもクリックひとつで簡単に計算できるように JavaScript プログラムで作ったスケール<デジタル分割カルキュレータ>はデジタルモデル（右段写真）。

小島と筆者は適宜、折り紙でモデルを作り・使い講義を行う。すると、生物応用化学専攻の学生は折り紙で分子模型(下写真)を作り化学教育実習に活かす、すると実習校の教師たちから教えを請われ伝えている。

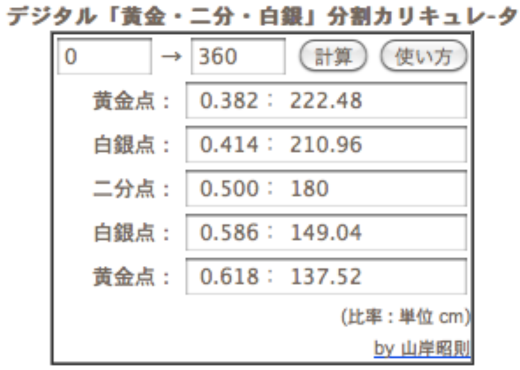
前記、数 x^n (n=0, 1, 2, 3, ‥)を 6 種の基本タイル状に現わしたベキタイル（下左写真）で高次多項式の計算技術や公式に意味づけし、４種の基本タイルで多面体を構成し、幼児の遊びから空間認識を向上させ、大学初級の立体



ベキタイル[18)]　　多面体タイル[19)]

幾何までの学びに活かす「タイル de 多面体」（上右写真）。「パターンの科学＝数学」を浮き立たせた諸実践[16)]、モンテカルロ法もそうしたツールのひとつだが、何を対象にするかによって物理的モデルにも数学的モデルにも社会学的モデルにもなる。こうした意思決定・発露の連鎖の中で発揮する一連の能力も含め筆者は、“数理リテラシー”と呼ぶ。

指導要領拘束下で、「数学嫌い」や「理科離れ」を拡大



再生産し続けざるを得ない立場に立たされている理数系教育に携わる教師たちに申し上げたい。多くの数理科学者たちがそれぞれの立ち位置で役立ち・使える「現場の数理」産み出してきたように、それぞれの理数教育に役立ち・使える「教科の数理」を産み出すことなく、青少年の頭をこじ開け、完成された出来合いの知識を無理やり詰め込み続けた理数教育の積み重ねが「数学嫌い」「理科離れ」を加速させたのではないか。「誰も本当は理解していないのに，ただひたすら試験にパスし，次に来る者もまた試験にパスできるように教えるという自己増殖的なシステムの中で，いったいどのようにして真の教育ができるのだろう」（ノーベル物理学者 ファインマン）という告発がある一方で、「令和の日本型教育」をめざすと未だに「文理の枠を超えて云々」と言っている。「枠を超えて」と呼びかけるなら、なぜ、1918 年以来の悪弊に引導を渡し、すべての青少年を科学技術立国の担い手になってもらう「数理リテラシー」の教育をこそめざすべきであろう。ファインマンは「点取り競争」に腐心させる日本の学校教育を揶揄しているようにも思える。

日本型教育スタイルの固執・強要を見ていると、かっての学校教育を通じ「原発安全神話」押し付けを彷彿とさせる。教育にも「V-1.危機を免れる多重安全システム」が講じられてしかるべきではないか[14)]。

PISA は「数学を現実的問題に活用できるか」という調査と認知プロセスや『評価の枠組み』の提示はできても、

如何せん評価調査という性格上、如何にしてそのような能力を育むかの方途/その能力を育む具体的な教育「プロセス・カリキュラム」を明確に提示しえない恨みがある。なぜなら、PISA 調査参加国がどう教えているかを埒外におかざるを得ないやむを得ない事情があり、そこで筆者はスローガン的に、大人の作った「言語依存過多の非現実」と言っている。

数理リテラシーを育む学校数学は、洗練された定理や証明を学習させられる演繹強調型でなく、“学びと総合の試行錯誤”を許容する構成的に展開されるべきである。そこでは学び手が定理を作り、証明をするということもある、彼らが理数教育を作りあげなければならない。もちろん、実際には、先生の助けで再創造するのだが、発見を教えることは決して簡単な仕事ではない。しかしそれは彼らに、直観を使い、当て推量や試行錯誤、知った結果の一般化、知っている結果との関連づけ、代数的な命題に幾何学的な意味をつけること、測定、その他数多くの工夫を必要とする。そうする中で数理リテラシーが磨かれるのだから。

現場教師が挑戦すべき、そして学校教育が取り組むべきは、つまるところ、身の回りに感じる不思議や面白さを＜根拠のはっきりしたやり方を考案して解決する＞プロセスを学び手たちと共に創り、実際に行わす学びの創造を伴う数理体験をさせること。この学びの下では、抽象的演繹的なお仕着せ数学で求められるときよりはずっと自信を持つことであろう。これが、筆者たちが模索・実現してきた「教育の数理＝数理リテラシー」の向う方向である。（パート２　完）

注（参考文献・URL ほか）

(0) 本冊子は、Web 増補版です。
(1) 同サイトのパート①「今ない不確実に立ち向かう数理リテラシー教育に向けて」です。
(2) 「今ない不確実」とは「ありえない」とか「ブラックスワン」と同義。存在しないと思われていた「黒い白鳥」が実在したことから、「ありえない」事象も現実に起こることの譬え。真意はその稀な事象が起こった時、壊滅的な事態を伴う事象。2007 年の世界金融危機を予見し、『ブラック・スワン-不確実性とリスクの本質-』(2009 ダイヤモンド社刊)を表したのはN.N.タレブで下記ナイトの「不確実とリスク」の本質を突く書。またタレブは、この著をフラクタル数学のマンデルブロに捧げたものであった。
(3) 1920 年代末の世界恐慌到来に備えることを提唱していたフランク・ナイトは、確率によって予測できる「リスク」と大数の法則が成り立たない「不確実性」とを明確に区別するよう主張し『Risk, Uncertainty and Profit（危険・不確実性および利潤）』(1921) を著した。
(4) 「事前」復興　1995 年の阪神・淡路大震災以降３０年間に起こった最大震度７を記録した６自治体。ことごとく「事前」復興計画を立てていなかった。現在、実績ある自治体数わずか１７自治体（令和５年７月国交省調べ）。
(5) 「統計学とは何か～偶然を生かす～」（1993 丸善　2010 改訂 ちくま学芸文庫）。モンテカルロ法導入に、これが最善の著というわけではない。全容を知りたければ、例えば、現代応用数学講座４三根久編著　「モンテカルロ法・シミュレーション」他がある。また注7、9、11 もご覧下さい。
(6) 数学教育協議会編『数学教室』(2011.10 No.719 国土社刊) 特集　確率の導入-数学の不思議-<中学校授業研究>『数学教育協議会第 59 回全国研究集会（福井大学）中学校「確率の導入」教材作りと大学工学部生の数理・統計観の問題点（小島・山岸共同発表）』　https://ws-idea.artec-t.com/RuleThumbScience.pdf

本稿は、この古い２本の報告を中心に 2024、5 年の若干の情報を加味し、仕上げた。データの古さを考慮してお読みください。

(7) 琵琶湖の内と外（陸地）を同時に含むマス目が出てきた場合は方眼をもっと細かくしていこうとする場合コンピュータを使用するときには、RANDOM（1, 1∝X））命令を使います。しかし、これを、「何もランダムに点を打たなくても、池の中の島の求積のために作った正方形の縦と横をそれぞれ 100 等分して 10,000 個の格子を作り（１mm 方眼紙だとそのまま読めば良い）、10,000 個のうち何個が四半分の円内にあるかを調べればいいではないか」と考え批判するのは適当でない。なぜなら、この方法では、どこから調べはじめるにしても10,000 個の調査が終わらないうちは答が出せない。それに較べてモンテカルロ法なら、n がほどほどに大きくなれば、どこで打ち切ってもそれなりの精度で値が求まるし、答の精度がどの程度であるかを評価することも、さほどむずかしくない。モンテカルロ法を使う方が何かと優れているのである。（大村平『シミュレーションのはなし』（日科技連）他参照）
(8) 確率論的ではない問題を解くために乱数を用いるのが「モンテカルロ法」で、確率論の問題に関する確率シミュレーションは「ただの」シミュレーションだと唱える人もいるが、「モンテカルロ」問題か否かは乱数を用いるか否かであって、それ以外のことはどうでもいい。（P・ナーイン『ちょっと手ごわい確率パズル』2000 青土社）筆者もこの立場をとっている。

(9)　本稿では、モンテカルロ法の起源をRao説の数学者で統計学者のK.ピアソンを採用したが、v.ノイマンとユラムの原子力研究の1945年頃から用いられはじめ「決定論的な数学の問題を、乱数を用いて解くこと」が起源という説もある。誰が起源かはどうでも良く、この方法が、現代では物理学、半導体工学、通信工学、生物学、経済学等々多岐にわたる方法として、また数値計算においてキチンとした方法ではどうにもならなくて万策尽きたときに“縋る藁”としての方法だとか、はたまた乱数を用いて計算機上に現象のモデルを作り課題のシミュレーションを行なって解決に活かすのが主要な部分になっているともいわれている。注7、8もご併せてご参照下さい。

(10) PISA開始当初から、明らかにされていた日本の学校数学を巡る問題点と同様、最近の理科を巡る心情が問題になっている。（2025年7月3日 TBS）

https://newsdig.tbs.co.jp/list/search?fulltext

日本の高校生の約半数が「社会に出たら理科は必要なくなる」日米中韓の意識調査+科学の学力は世界トップレベルでも意識との乖離が浮き彫り。

(11)　ノーベル経済学者E.スティグリッツ『原発事故と金融危機に共通するギャンブル性

https://diamond.jp/articles/-/12503)

(12)　ラカトッシュ「数学的発見の論理～証明と論駁～」(1976)「現在の数学・科学教育が権威主義の温床であり、自立した批判的思想の最悪の敵であることはいまだに十分認識されていない。」副題を強調する向きもいる。

(13)　D.J.ハンド『”偶然”の統計学』（2015 早川書房）稀な・ありえない事象も実は頻繁に起こっていることを実証する努力をしている本。

(14)　大危機を免れる確率計算と多重安定システムを考える。https://wsidea.artect.com/RuleThumbScience.pdf#page=6　この注のテーマ名を唐突に感じた読者の方々がいると思いますが、内容をご覧になったらお気づきの通り本稿の続きにあたります。北陸地方の方々は能登半島地震後の８月に次の報道がされたのをご記憶かと思います。近畿～北陸の沿岸や沖合 M7以上地震のおそれある活断層を公表、各地の地震の発生確率については、来年中の公表を目指す(2024.8.NHK防災News)

https://www3.nhk.or.jp/news/html/20240802/k10014533881000.html　この地震を、多面体サイコロ（10で「1」が出たら地震発生確率 10%とし、20 で震度やマグニチュードをランダムに割り当てるモンテカルロシミュレーション）を用い考えるつもりでした。

(15)　原則１：誰もが取り組め自らの頭で考えられる。原則２：それまでの学習格差（ハンディキャップ）をなくす。原則３：達成感を伴わす（飛躍がある）。詳細は注6や16以降のWebをご覧下さい。

(16)　パターンの科学　https://ws-idea.artec-t.com/handmath/Pattern/pattern.html

(17)　『子どもにとってリアリティある学びを紡ぐために～社会と結びつくアンテナを広げて～』（2011年成分堂　正田良編著『算数・数学って怖くない（増補版）』草稿）

変装アイドルを探せ！紙製カードコンピュータで遊ぶサーチとソート、2進法を内容とする。

https://ws-idea.artec-t.com/handmath/teacheduc.pdf

(18)　生い立ちの「ベキタイルの代数」 https://ws-idea.artec-t.com/Tiles World/AlgebraTiles.pdf

ベキタイル（英語名 AlgebraTiles）

インターネットで和洋両語の検索お勧めします。

小島和美『私を変えたベキタイル』- CiNii Research でも案内されています。注20のホームページ中にこの小島実践の寄稿を収録してあります。

(19)　タイルde多面体　https://ws-idea.artec-t.com/polyhedron/index.html

手軽に平面から多面体をつくることができる平面タイルです。

本文中の写真（正方形、三角形、長方形、五角形が基本平面タイル、特に、三角形と正方形）です。詳しくは、URLをブラウズしてご覧下さい。

幼児の組立遊びを通しての空間認識を育む一方、組立てた基本多面体パーツで分析・総合しつつ画法・射影・位相幾何の学びに至らせたい。

(20) アナログとデジタルの世界に遊ぶ

https://ws-idea.artec-t.com/index.html

筆者のホームページです。注と重複もありますが、本稿IV.の具体の一部で、紙数制限上Web閲覧していただくスタイルを採らせていただきました。お役立てできるところがあればお使い下さい。注１の年報論文の最後に、教師の仕事は「未来に手をつけられる形を創造し、未来に託す」と書き、現在もこのホームページで後始末の最中です。

(21)　４枚のコイン投げの実験　解説

４人の性別の分れも次のようにすると実験できる。

４人の子供のかわり　・・・・４枚のコインを投げて

雄か雌か、一般に男か女の代わり・・表裏の分かれ方

家族数の代わり　　　・・・・何回も投げて調べる。

ここでは、40回４枚のコインを同時に投げて、表か裏の分かれ方を記録しよう。ただし、記録する時は表が出れば１、裏が出れば０と表わすものとする。

性別の分れ方の集計　　全部同性　２：２　３：１

（　　）班　　　　　（　　）（　　）（　　）

各回毎の記録　　　　　　１　　２　　３　　４

実際に、４枚のコインを投げて実験し記録して頂きたい。ここで生徒たち（２名一組）の実験データを１クラス分挙げておく。

班No. １ ２ ３ ４ ５ ６ ７ ８ ９ 10 11 12 13 14 15 16 計　比率

全部同性８ ５ ２ ３ ９ ７ ７ ３ ５ ６ ７ ５ ３ ５ ６ ２ 89　0.125

３：１　　19 19 23 21 21 18 20 21 17 18 13 24 21 19 22 29 343　0.5

２：２　　13 16 15 16 10 15 13 16 18 16 20 11 16 16 12 9 248　0.355

回数　　　40 40 40 40 40 40 40 40 40 40 40 40 40 40 40 40 680

メモ：違ったコインで実験したデータの合計を求め、比率を計算することは、本来ならば正しくはないが、後日の確率計算の参考までに合計し、比率を出しておく。

(22) 自販機の釣り銭問題　賽Ｂ

演習１）硬貨の出現比 50 円：100 円＝30：70

五十円客数：百円客数 ≒ １：２ を意味している（賽Ｂ）

演習２）賽Ａの逆なので省略

釣銭枚数変動シミュレーション（演習賽投げ用）								＜独自データ記			
客No.	50	100	釣銭枚数	客No.	50	100	釣銭枚数	回	賽	回	賽
1	6		101	51	5		79	1	6	51	5
2		4	100	52		4	78	2	4	52	4
3	6		101	53		3	77	3	6	53	3
4	6		102	54		1	76	4	6	54	1
5		2	101	55		3	75	5	2	55	3
6	6		102	56		4	74	6	6	56	4
7	6		103	57	5		75	7	6	57	5
8		3	102	58		2	74	8	3	58	2
9		1	101	59	5		75	9	1	59	5
10		3	100	60	5		76	10	3	60	5
11		4	99	61	6		77	11	4	61	6
12	6		100	62		1	76	12	6	62	1
13	6		101	63		4	75	13	6	63	4
14		3	100	64		2	74	14	3	64	2
15		3	99	65		1	73	15	3	65	1
16		3	98	66		4	72	16	3	66	4
17		3	97	67		2	71	17	3	67	2
18	6		98	68	6		72	18	6	68	6
19		3	97	69	6		73	19	3	69	6
20		1	96	70	5		74	20	1	70	5
21		1	95	71		4	73	21	1	71	4
22		3	94	72		3	72	22	3	72	3
23		1	93	73		4	71	23	1	73	4
24		3	92	74		1	70	24	3	74	1
25		3	91	75		4	69	25	3	75	4
26	6		92	76		1	68	26	6	76	1
27		3	91	77	5		69	27	3	77	5
28		1	90	78	6		70	28	1	78	6
29		3	89	79		2	69	29	3	79	2
30		1	88	80		3	68	30	1	80	3
31		4	87	81		2	67	31	4	81	2
32	6		88	82		1	66	32	6	82	1
33		2	87	83		1	65	33	2	83	1
34		2	86	84	6		66	34	2	84	6
35		3	85	85		2	65	35	3	85	2
36		3	84	86	5		66	36	3	86	5
37	6		85	87		4	65	37	6	87	4
38		1	84	88		1	64	38	1	88	1
39	6		85	89		2	63	39	6	89	2
40		4	84	90		2	62	40	4	90	2
41		2	83	91		3	61	41	2	91	3
42		4	82	92		2	60	42	4	92	2
43		4	81	93	6		61	43	4	93	6
44		1	80	94		4	60	44	1	94	4
45	6		81	95	6		61	45	6	95	6
46		4	80	96	5		62	46	4	96	5
47	5		81	97		1	61	47	5	97	1
48		4	80	98		1	60	48	4	98	1
49		3	79	99	5		61	49	3	99	5
50		1	78	100		4	60	50	1	##	4
出現数	14	36		出現数	16	34					