「競い合せ」世界一回復めざす日本流、その視野の狭さは子どもの学ぶ意欲を削ぎ、国際標準からますます遠のく

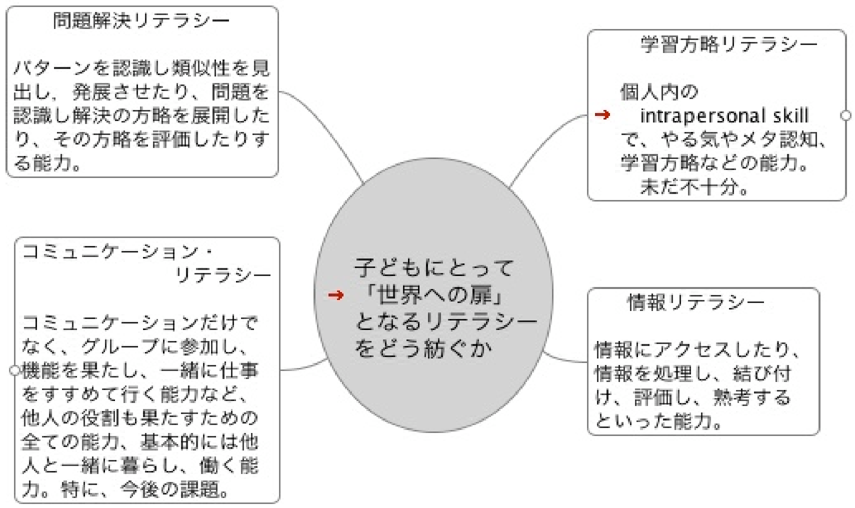
～　数学教育の国際的な転換にあたって　～

１．すべての子どもたちにのびのびと学ばせ、その能力を存分にのばす

　この節の少々長いテーマは私が賛同する「教育再生民間会議」の設立目的である。初めは安倍退陣で頓挫した官製「教育再生会議」に対し、その方向性に異議を唱え設立された民間会議だが、昨年から実施している全国学力調査をはじめ、多数の自治体が推進する各種テストを梃に、子ども・教師を「競い合せ」世界一回復をめざすＰＩＳＡ対策に終始する近視眼的愚策へのアンチ・テーゼと評価し、またそれをどう実践するかを考察する本稿に相応しく冒頭テーマに掲げた。

　世界の教育は大きく動いている。その特徴は、教育を「学校」の枠内に押しとどめる方向でなく、生涯に亘って学習しつづける能力の養成、問題解決のための批判的思考の養成という視点からだ。

　２０００年の読解リテラシーを皮切りに、２００３年の数学リテラシー、２００６年の科学リテラシーの評価調査を実施したＯＥＣＤ／ＰＩＳＡ（Program for International Student Assessment　国際的な生徒診断の企画）は、２１世紀の国際的社会に必要な『生きるための知識と技能』としてのコンピテンシー（能力）を定義しようとする国際的、学際的、かつ政策指向的な研究プログラムであるＤｅＳｅＣｏ（Definition and Selection of Competencies）の評価調査の一環として、ＩＡＬＳ（国際成人リテラシー調査）、ＡＬＬ（成人のリテラシーとライフスキル調査）と共に１５歳児能力の査定、診断、評価をめざした*1）。最近の報道によれば、高等教育を横断して養われるべき能力の「批判的思考力」に調査対象を絞り、学習成果評価に向けて各国で比較しやすい「知識の応用展開力」を診る専門分野の選定がなされているという。



ＰＩＳＡのリテラシー概念とその概要*3）

このような性格のＰＩＳＡ報告を『生徒の学習到達度調査』（国立教育政策研究所）と「学校教育と学力」問題、「読み書き」能力に狭めてしまった日本の官許教育界と、この傾向をさらに増幅させた「成績順位の下落傾向が止まない」と危機感を煽り騒ぎ立てた各種メディアの責任は重い。

ＰＩＳＡ報告で日本が注目すべきデータは、上図に示す「リテラシー」論とそれに基づく「知識やスキルが現実問題に活用できる形で習得されているか、すぐ使える形で保持されているか、国の教育はそんな知識やスキルを育んできたか」という評価の視点であり、「学習方略リテラシー」のひとつ「数学リテラシー」に絞れば、成績の高さとはうらはらに、学校数学が数学への興味・関心・楽しみなど、学びにおいて大切な感情を摘み取り、日本の子どもたちはこの感情面でことごとく「際立って劣る」*0）とデータで示されたこと。従来の学校カリキュラムをどれだけ習得したかを問うのではない基準による「教育の基調の転換」を問題開発と評価の指標を添え示したこと*0）。そして、もしＰＩＳＡの評価問題や調査項目が適切なものであったとすれば、結果は日本の子どもたちはＰＩＳＡが“世界への扉”と位置づける「リテラシー」を育むことには成功していないばかりか苦手としていることがデータで示され*2）、いわゆる「数学嫌い」の温床が明らかにされたこと。

こうした捗々しくない結果を招来した理由の検討や、知識偏重に陥ってきた学校教育ならびに評価法を改め、何をこそ査定・診断・評価しなければならないか

というような共通理解も不十分なまま、子どもと教師を「競い合せ」る各級学力調査にのめり込む風潮を作ってしまった。これはＰＩＳＡ報告の誤用・悪用の何ものでもない。特に、数学に対する感性を削ぎ続ける学校数学の放置は許されざること。こうした傾向に批判的な人々（組織）は何も「教育再生民間会議」だけでなく全国津々浦々に少なからずいる（ある）。この声をもっと大きくし、それはどう在らねばならないかを明らかにすることを焦眉の急と考える私は、大学における教師教育と併せこうした人々や組織からの要請に応えるサイエンス・アドバイザー的活動に努めている。

２．リアリティある学びのプロセスで感情豊かに

まず、私が子どもから大人までが集う交流の場で楽しんでもらっている数学の面白さ(sense of fun)･不思議さ(sense of wonder)を感じさせる問題数題を紹介し、これを素材に本稿のテーマについて述べる。

まず、私が子どもから大人までが集う交流の場で楽しんでもらっている数学の面白さ(sense of fun)・不思議さ(sense of wonder)を感じさせる問題数題を紹介し、これを素材に本稿のテーマについて述べる。

例題１）子どもといつも行く遊園地に池があり、その中に複雑な形をした小さな島がある。
案内板の前を通るたびに子どもが、「あの面白い形の島の広さはどのくらいあるのだろう？」と聞かれるお父さん。事務所でもらった縮図を手に、測量機器を使わ

ずに島の面積を求める方法をあれこれ考えています。
　皆さんも何か良い方法を提案して頂けませんか？
　<略解１～４>本文末参照（以下同様）
　二人コンビで、形が複雑な上、実際にも測れない池の中の島の面積を求めた参加者たちは、「１辺が１０cmの正方形と島の形に切り取った画用紙の重さを量り、プロットした点の数から本当に島の面積の求められることに驚いた。重さを面積に変換するなんてすごい発想だと」と驚く。

　私は、ＰＩＳＡを高く評価する。したがって、その誤用・悪用がいずれはＰＩＳＡの価値まで揺るがすことに繋がることは避けたい。誤用・悪用の代表は既に指摘してきたＰＩＳＡ対策テストに狂奔する日本の姿である。この信じ難い事態が起こっている原因は、ＰＩＳＡが評価調査しかできないという避けられない状況を踏まえないことに由来すると考える。
　この状況がもたらす弊害の第一は、例題１)、そして後の例題４つもそうだが、「のびのび学ばせる」プロセスを考慮した「学びのプロセス」は教育上欠かせないがこれを欠かざるを得ないこと。ＰＩＳＡ調査に似せた類題を開発し子どもと教師を「競い合せ」るテストを頻繁に行う現状は、子どもたちに「学び」をますます味気なく感じさせ、点数は取れても興味・関心・楽しみ・有用感など、学びにおいて大切な役割を果たす感情をますます削ぐことになる。つまり、「数学嫌い」の拡大再生産である。第二に、ＰＩＳＡの「そんな知識やスキルを育んできたか」との国への問いかけはとりもなおさず教師への問いかけである。ところが、報告では「どう育むか」という点については、教師が問題解決を指導する上で準備できるプロセス提示で終えている（2003版『評価の枠組み』P155　P7の「２つのプロセスにおける‘はじめの現実問題’の違い」引用参照)。これも評価調査しかできない限界からくるもの。ただし、この仕事はむしろ実施カリキュラムが異なる各国の教師たちに委ねるのが順当なところと考えると、日本の教師たちは「競い合せ」に埋没させられていないで、現在のＰＩＳＡ対策テスト横行の異常な状況の改善を目指す人々・組織と共にＰＩＳＡの誤用・悪用を正し、「ＰＩＳＡを超える」方途を提示するよう奮闘することこそ必要な行動であり、強く期待する。
　ＰＩＳＡのように評価調査しかできない状況にない国や自治体が行わなければ

ならないのは、まさに２１世紀の国際社会に『生きるための知識と技能』の能力を育むことの模索であって、日本の子どもたちが著しく悪い結果であった「読解リテラシー」を「読解力向上推進事業」と銘うって類題作りをさせ、それをテストで競わせるという近視眼的なＰＩＳＡ対策ではない。先般公表された「ゆとり教育」をスケープゴードにした指導要領改定は、相変わらず「内容と過程の改造」という質的転換を伴わない「時間と内容」の量的回復で終わる可能性がある。

　このような国・自治体の政策から子どもたちを救えるのは、綿密なカリキュラム実施にあたっても子どもたちの自由な探求とのバランスを考慮しながら行わなければならない教師たちの日々行う実践をおいて他にない。

例題２）　天空から地上、海底にまである自然の造詣「渦巻き」を簡単に手書きする。

星　雲　　　　　　松ぼっくり　　　　　ハリケーン　　　　　　オウム貝内部

略　解）参照

　自然の造詣がいとも簡単に描け、しかも、円を描く道具と思い込んでいたコンパスで渦巻き曲線（スパイラル・カーブ）が描けたことは参加者にとっては驚きとなる。またこうしてなぜ描けたのか？

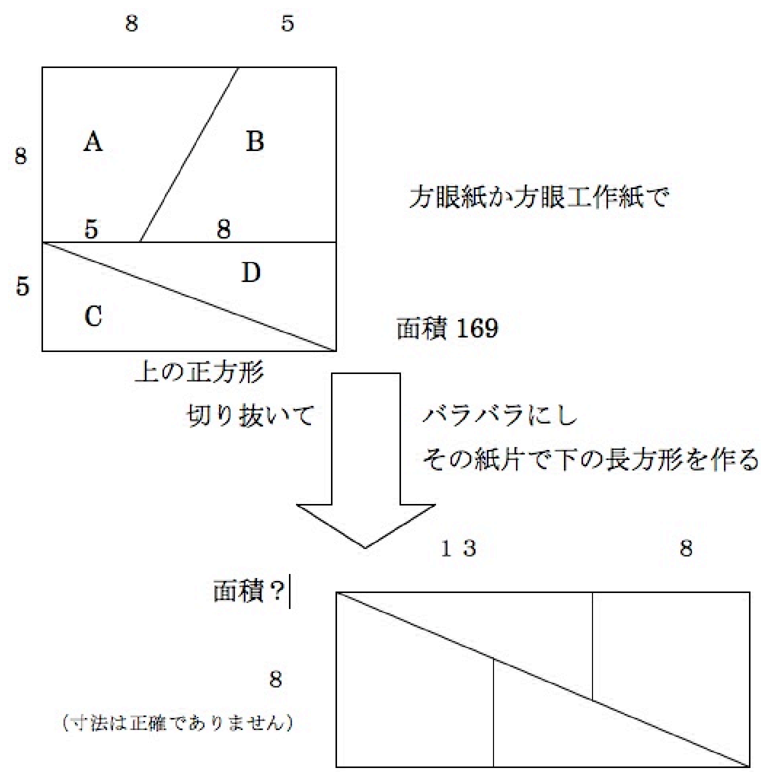
例題３）面積増減の不思議！？

　グラフ用紙に次図上のように一辺１３cm×１３cmの正方形を描き、８cm、５cmで寸法のように線を入れる。

正方形を切り抜き、それをさらに各寸法で切断し、合わせて(裁ち合わせ)長方形を作り、それぞれの面積を求めよう。どうなるだろうか？

　小学校高学年から「正方形を裁ち合わせて長方形に作り直しても面積は変わら

ない」というのが常識としてある。ところがここでは「-１」少なくなっている。



同じように、１辺の長さが８の正方形を３、５、また、１辺の長さが 21 の正方形を８、13 に切り分け、裁ち合わせて長方形を作り、正方形と長方形の面積計算をし比べてみる。

同じように面積増減が起こるだろうか？

正方形の面積が１６９なのに、長方形の面積は８×２１＝１６８で「１」減っているではないか！？　ひき続き答えていくと思いがけないことに、この後もズ～と「１」の面積が増減するのか？　しかも＋１と－１が交互に起こっているようだ。　こんなこと「なぜ起こる！？」とつぎつぎに疑問が増える。

略　解）参照

例題４）「みなさん！　符号が同じ２つの好きな数を思い浮かべてください。」

思い浮かべたならば、つぎの順番で作業を進めてみましょう。

step １）　各自思い浮かべた２数、例えば　３，６　の時この和９を作ると数の

列（以下、数列）　３，
６，９　ができる。
step　２）　数列の後ろの２数６，９の和１５を追加する。以下同様につぎつぎに後ろの２数を加えて数列を作っていく。
step　３）　できた数列で　次の数／前の数　の比を作っていく。
６／３，９／６，１５／９　・・・・・・・
step　４）（携帯などの）電卓で　比　６／３，９／６，１５／９，　・・・・・・・を小数に直した時、どんな値に近づいているように見えますか？
各自の結果を出し合いましょう！

略　解）参照

参加者それぞれが思い浮かべた２数、例えば（1/2，1/3）、（－２，－５）、（√２，√６）などと近づいている値を共に板書してもらう。不思議なことに思い浮かべた２数が違っても同じ値αに近づいているではないか。
これには全員ビックリ！　「なぜだ！？」と。

３．同じ「現実問題からスタート」でも違う２つのプロセス

本稿ではＰＩＳＡが世界の教育界に投げかけた基調、リテラシーと呼ぶ「学んだ知識やスキルを現実世界に適用できる能力」養成を高く評価しつつも「それをどう育むか」のプロセスを明示していないＰＩＳＡの補完を私が行っている事例を紹介し参考に供している。
ここでテーマにする「それをどう育むか」の核心は、学び手に

問題解決能力はいかに醸成されると考え、どのような手だてで実現できると考える

かにある。ここにこそ評価調査しかできないＰＩＳＡのジレンマがあると考えている。つまり、開発した「現実問題からスタート」させ、巧みに仕組んだ「解決プロセス」の回答分析でその能力を評価するしかできないからである。それに対

し、私は、紹介した例題も含め、学び手が解決すべき課題と直面し、その解決に必要な知識・技能が既習でなくても、持ち合わせの知恵・経験を動員して深く考え結論づけるプロセスを体験させる工夫をする。

　このように学び手が直面した問題を解くにあたって、自前で行うのと、ＰＩＳＡ問題をはじめその類題として大人の作った与題を解くのとの違いは、何よりも「学ぶ者にとってのリアリティ」のレベルにおいて決定的な違いがあること。ＰＩＳＡの問題開発と評価の枠組み提示を高く評価はしても、テスト用に作られた問題を解くことを繰り返しても、せいぜい類題を解く力が身につくだけ。「前例にない」「見えない」問題解決に遭遇した時、どの学んだ知識・技能を使うかは自分で判断しなければならない。また、知識・技能を持ち合わせていない時（一般的にこの方が多い）には、誰もが日常普段に行うであろうより現実的な仮説設定と修正をくり返し行う“学び”と“総合”の絶えざる営みを繰り返しつつ課題を探究し創成能力を発揮することが求められる。いずれにしても子どもたち自らが「意思決定」しなければならない。こうしたことへの対応を含め「世界への扉」となるリテラシーを子どもたちに身に付けさせることを求め、評価問題で工夫したのがＰＩＳＡである*2)。

　ＰＩＳＡは 「現実問題からスタート」を提唱している。しかし、つぶさに見ると『数学リテラシー』におけるそれと、『問題解決リテラシー』（日本訳「問題解決能力」）におけるそれは明らかに異なる。『数学リテラシー』にいう現実問題が数学単独で解決できるものであると定義するのに対し、『問題解決リテラシー』では「問題解決の道筋が瞬時には明白でなく、応用可能と思われるリテラシー領域あるいはカリキュラム領域が数学、科学、または読解のうちの単一の領域だけには存在していない、現実の領域横断的な状況に直面した場合に、プロセスを用いて、問題に対処し、解決することができる能力」と定義するように教科の「垣根」を超えている。

　私は、このＰＩＳＡの提唱を従来の日本の大学前教育に対し２点において革新的であると見る。ひとつは、ＰＩＳＡのいう意味での「現実問題に対処する」数学リテラシー教育は１５歳児教育までにおいてほぼ不可能視してきた意味で。もうひとつは、大学教育において注目されている新しい教育スタイル、「学際的（学部横断的）アプローチ」の（大学前）教育版に位置づくこと。つまり、『問題解決

リテラシー』がめざしているのは興味・関心から出発し、ディシプリン（discipline：学問領域、専門分野）がもつ「垣根」を超えて多様な視点で問題を発見・解決していくスタイルに近く、第一点と同様に１５歳児までには考えられていなかった。

この意味からも、ＰＩＳＡの類題を作成し、出題傾向を知らせ、調査を繰り返すというのは本末転倒であり、近視眼的対策でＰＩＳＡの誤用・悪用という所以である。

２つのプロセスにおける「はじめの現実問題」の違い

数学化プロセス

（1）現実に位置づけられた問題から開始すること。
（2）数学的概念に即して問題を構成し、関連する数学を特定すること。
（3）仮説の設定、一般化、定式化などのプロセスを通じて、次第に現実を整理すること。それにより、状況の数学的特徴を高め、現実世界の問題をその状況を忠実に表現する数学の問題へと変化することができる。
（4）数学の問題を解く。
（5）数学的な解答を現実の状況に照らして解釈すること。これには解答に含まれる限界を明らかにすることも含む。

数学の「設計の主要点」と「機能」との相互作用

注意しなければならないのは、数学のための設計の主要点には、学校で共通して教えられている基本的な用語、手順及び概念を知ること、及びこれらの主要点がどのように構造化され、使用されるかを知ることが含まれるということである。不幸なことに、数学における設計の主要点についての構造を知らなくても、あるいは問題を解決するためにこれらの主要点をどのように使用するか知らなくても、数学の設計の主要点についての多くを知ることができるのである。

『評価の枠組み』ｐ018

問題に対処するプロセス

問題の状況が
・第1に、現実のものであり
・第2に、解決の道筋がすぐには明らかではなく
・第3に、1つのリテラシー領域内には限定されない
場合、
・どの程度効果的に問題に対処し、問題を構造化し、表現し、解決することができるかを説明するように計画され、特に、次の６つの問題解決のプロセスを身に付けていることを例証しなければならない。

(1)「問題の理解」
(2)「問題の特徴づけ」
(3)「問題の表現」
(4)「問題の解決」
(5)「問題の熟考」
(6)「問題の解法を伝えること」

各詳細については解説参照

ただ単に最終的な解決方法よりもむしろこれらのプロセスに重点を置くことにより、人々が問題解決に対してどのようにアプローチするかを理解することができる。（中略）したがってこのアプローチは、問題解決が単なる調査の得点を超えて寄与するものについて、独自の説明を提供する。
関連のあるプロセスを理解することはまた、教師が問題解決を指導する上で教育活動を準備できるようにする。

ところで「現実問題からスタート」、「はじめに現実問題ありき」というと、例題２）の自然や社会の経験的・実際的問題と思いがちだが、そうでない例題３）、４）のように、一見、小学生の教材のようであっても学び手誰もに「なぜだ！？」と知的好奇心を湧かせることができれば、大学生・教師を含めた大人にも強烈なインパクトを与え、学びは成立する。実際、挙げた例題すべて、工学部の「教育課程研究」の講義でも行ったところ学生たちは言う。「最初の不思議だなぁと感じ

させる入り方はインパクトがあり、最初からこうなるとわかっていたら考えずに終わってしまったように思います。実際やって、不思議に思い、考えて証明という一連の流れがありとても良かった」、「教師を目指している私たち学生に毎回不思議さを与えそれを解決していくといった講義の形式はとても模範的な講義方法だなと感じ、この方法を見習えたらと思いました」などとレポートしている。逆に、数学問題を含め専門分野の問題は一般的には抽象的・形式的であるため専門外の人はその前で立ち竦む。しかし、学ぶ者にリアリティを感じさせる要件を整えられれば、それは小学生、時には幼児すら遊べるほどの教材になる。例えば、例題１）は、今や統計学のみならずすべての科学において、複雑な数値的諸問題を解くための標準的な方法となってきて、これを用いれば，生成した乱数を用いて簡単な計算を行えばよいだけというシミュレーションとかモンテカルロ技法*4）とよばれる方法を、子どもから大学生までの教材に工夫した*5）。

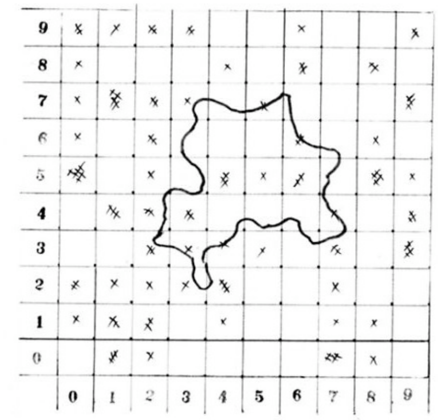
　このような現代数学の内容を教材にアレンジして行う私の授業研究・講習会に中学生と一緒に参加した小学校教師は言う、「課題が本人にとっては難しくて理解不可能なものであったとしても、興味深い題材に置き換えてあったり、作業が入ることによって、とっつきにくい意味不明のものから、何となく興味が持てる、楽しいものになることが生徒の様子から分った」と。つまり、「学ぶ者にとってリアリティ」が実現できたならば、たとえ直接的に自然や社会の問題でなくても、学び手すべてを同じスタート台に立たせ、探求する対象になる。これもまた現実問題の範疇に入れるべきだと思う。こう考えると、「はじめに現実問題ありき」とするＰＩＳＡの現実問題の定義は１５歳児を対象としてももっと広げる余地があるように思える。

４．現代数学の内容を教育的に咀嚼して教えることの意義

　私のモンテカルロ法の講義でこれを専門として学んだ物理工学４年生やこのプログラミングを行ってきた知能システム４年生は、「モンテカルロ法をこんなに楽しく、また簡単に学習できてしまう、こんな授業が出来るようになりたい」、「モンテカルロ法はプログラミングでやったことがあり手法は知っていたがそれを誰でも分かるように体験できるようにしたことにただ感心させられた。」、「普通は知らないモンテカルロ法という数学でもサイコロ２つで島の面積を求めるという実験でモンテカルロ法を体感、そして知ることもできてしまう。こういう授業作り

ができるようにしなければいけないと思った。」などとレポートしている。

なお、例題１）を１０面体サイコロ２個を１００回転がすコンピュータ・シミュレーションで行ったデータは100点中21点が島の中にプロット（右図）された。前と同様に　S/100 ＝ 21/100　より、S＝２１平方cmと求められる。投げる度に若干の誤差は起こる。



今や統計学のみならずすべての科学において，複雑な数値的諸問題を解くための標準的な方法となってきたシミュレーションとかモンテカルロ技法とよばれる方法によれば，生成した乱数を用いて簡単な計算を行えばよいだけである。

C.R.Rao『統計学とは何か〜偶然を生かす〜』のモンテカルロ法を引用しよう。

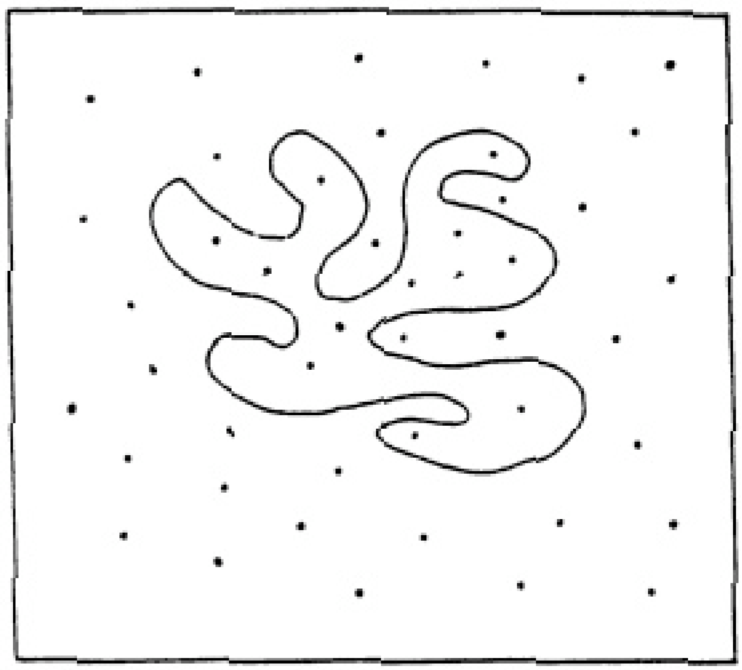
イギリスの数学者で初期の頃の統計学の理論や方法に貢献したカール・ピアソン（KarlPearson）は，正確な解を求めにくい複雑な確率・統計の問題を解くために，乱数の使用に気づいた最初の人であった。

いまたくさんの変数，たとえば p 個の変数 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ の同時分布がわかっているとすれば，ある与えられた関数 $g(x_1,x_2,\cdots,x_p)$の値の分布は，どのようにして求めることができるのだろうか？ この問題は形式的には重積分の形で解が得られるが計算はむずかしい。ピアソンはこのような問題に対して，少なくとも近似的な解を得るために乱数が有用であることに気づき，この種の研究を行う人たちのために乱数表を用意することをティペットに勧めた．ピアソンは，つぎのように言っている。

> モンテカルロで興行されたルーレット結果の１ヶ月分の記録は，
> 知識の源泉を議論する際の資料になるものである

シミュレーションの基本原理は簡単である。たとえば与えられ正方形の面積に対して，そのなかに描かれた図形の面積の割合を知りたいとしよう（図参照)。この図形は複雑であり，器具を用いてその面積を測る簡単な方法はないとする。いま正方形の隣り合う２つの辺を x 軸，y 軸にとる。乱数の組（x，y）を選び，座標（x，y）をもつ点を正方形のなかにプロットする。ここで x，y は，ともに区間（０，

b）からとられたものであり，b は正方形の一辺の長さより大きいとする．この操作を何回も繰り返したとき，ある段階でその図形のなかに落ちた点の数が a_m，正方形のなかに落ちた点の数が m であったとしよう。ロシアの有名な確率論研究者であるコロモゴルフ（A. N. Kolmogorov）が与えた大数の強法則とよばれる定理があるが，これによれば，もし取られた点の組が本当にランダムであれば，m を大きくするにつれて，比 a_m/m の値は，正方形の面積に対するその図形の面積の真の比の値に近づく。



図形の面積　　　図形の中に落ちた点の数（a_m）
正方形の面積　　（正方形の中に落ちた）ランダムな点の総数（m）
定理　：　a_m／m　—> 真の比の値（m -> ∞）

この場合，この方法の精度は，乱数発生器がどの程度信頼できるのか，および与えられた条件のもとでどのくらい多くの乱数を発生することができるのかに依存している。

＜C.R.Rao『統計学とは何か～偶然を生かす～』（丸善）より引用＞

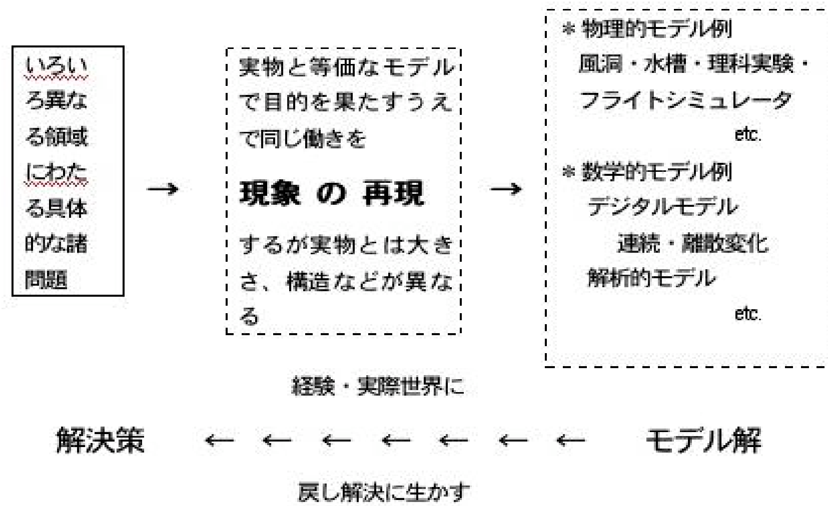
４．プロセスを用いて、問題に対処し、解決する能力を育む

「現実問題からスタート」を重視するＰＩＳＡは、数学リテラシーにしても問題解決リテラシにしても「現実問題に直面した場合に、プロセスを用いて、問題に対処し、解決することができる能力」を育んできたかの調査評価をめざした。

　これもまた１５歳児までの子どもたちに「意思決定」する手だてを習得させようという積極的なＰＩＳＡの意向で、これまでの日本の１５歳児までの教育の範疇にはなかった。

　人は生活においてさまざまな問題に直面し「巧みに・かしこく」解決するが、直接には解決できない難問に遭遇したとき、次図のように「課題の本質」をいろいろなモデルで表現し、そのモデルでもって考察を進めいったんモデル解を求め、それでもって難問を解決するのに役立ててきた。

＜**経験世界**＞　＜**モデル世界**＞

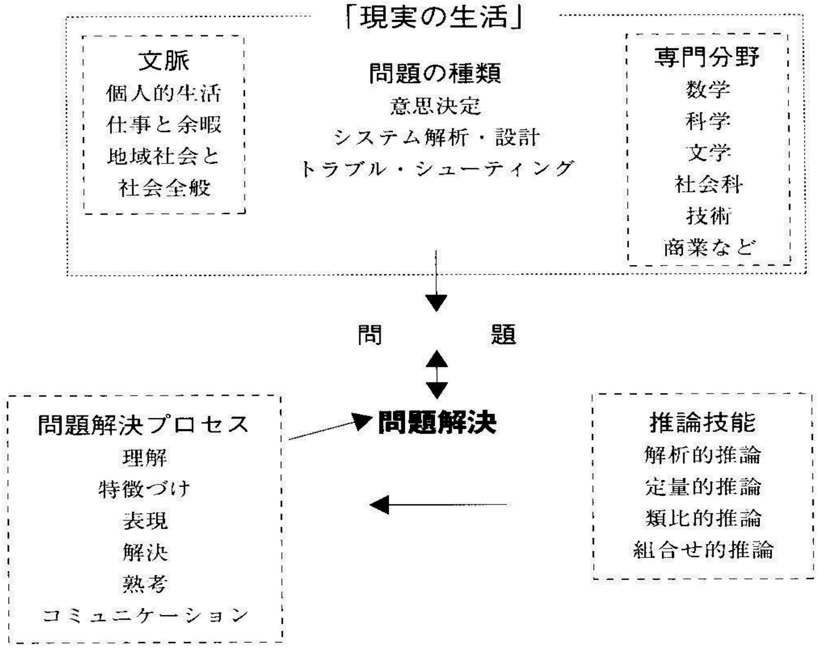


　こうした現実の問題に対処する過程で人々が苦労して編み出してきた方法を子どもたちが行えるようにする。見たことのない問題、出くわしたことのない場面に直面した時に、子どもたちがプロセスに則って、いま所有する知識・技能を活用して「意思決定」を行い解決していく、これこそが望ましい「リテラシー」と言えよう。

　ＰＩＳＡ調査結果で、独自に「意思決定」を下さなければならない問題、特に、知識・技能を持ち合わせていない問題や定型外の問題には立ち向かわない傾向がある日本の子どもたちの特徴が「高無答率」で浮き彫りにされた。

ＰＩＳＡはこの「問題解決の枠組み」における主な構成要素を下図のように図式化している。

問題解決の枠組みにおける主な構成要素



課題は、問題に直面したときに、この『問題解決プロセス』なり、その一手法としての『数学化プロセス』を駆使して、問題に対処し、解決する能力を学び手たちに育むことにある。

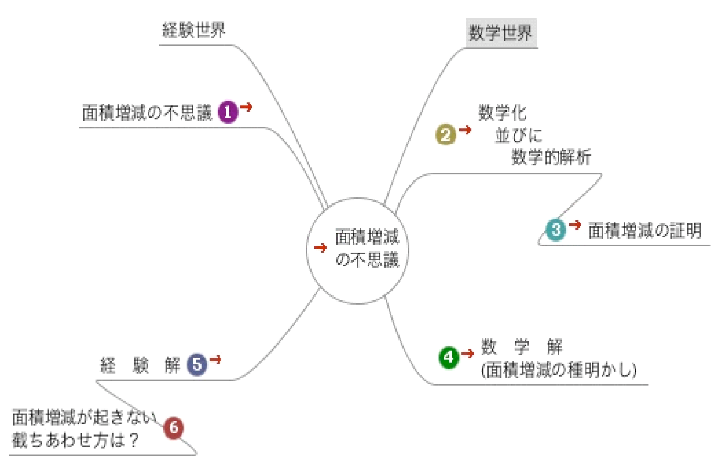
紙幅の関係で、例題３）の「面積増減の不思議」を解き明かすプロセスを例に『数学化プロセス』に則って思考を進める様子を見よう。

例題の略解で「なぜだ！？」と誰しもに思わせることに成功したとしても、それは『数学化プロセス』におけるスタート台（下図①）に立ったに過ぎない。この「面積増減の不思議」を解き明かすプロセス②～⑥を辿ろう。

②では、この面積増減が「１」という不思議が、果たして一般的に成り立つのかを考えるために、

まず、「課題の本質」を図式で表す。

<u>数学化プロセスのマインドマップ</u>



正方形の辺の長さの数列f_nは

３，５，８，１３，２１，３４，・・・

のように$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$を満たしている。

次図左のように、f_{n-1}とf_{n-2}の和f_nを一辺とする正方形を

f_{n-1}とf_{n-2}で切り分け、次図右の長方形に裁ち合わせるとどんな場合について増減「１」が成り立つのかという問題を考えることなる。

正方形の面積は式で表すと、$f_n{}^2$ であるが、長方形の面積は

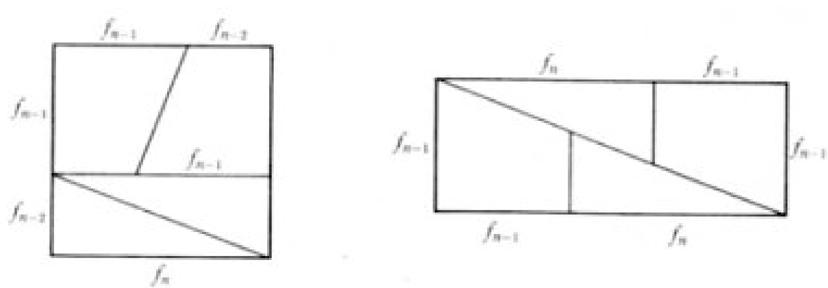
$(f_n+f_{n-1})\cdot f_{n-1}$　、

これは $f_{n+1}\cdot f_{n-1}$ と変形できる。

よって　$(f_n+f_{n-1})\cdot f_{n-1}=f_{n+1}\cdot f_{n-1}$

こうして、n≧2の時、この面積の差が「1」しかないということは次の恒等式が成立するかどうかを調べればいいことになる。

n≧2について　$f_{n+1}\cdot f_{n-1}-f_n{}^2=(-1)^n$　が成立する。



この式は　シンプソン（Simpson）の恒等式といわれている。

③ではこのシンプソンの恒等式を証明する。

nに関する数学的帰納法によって次のように証明できる。

１）n＝2の場合には、$f_3\cdot f_1-f_2{}^2=2\cdot 1-l^2=1=(-1)^2$

２）次に、2より大きいあるnについて、この式が正しいと仮定するとき、

n＋1について、

$$f_{n+2}\cdot f_n-f_{n+1}{}^2=(f_{n+1}+f_n)\cdot f_n-f_{n+1}{}^2$$
$$=f_{n+1}\cdot(f_n-f_{n+1})+f_n{}^2$$
$$=f_{n+1}\cdot(f_n-f_{n+1})+f_{n+1}\cdot f_{n-1}-(-1)^n$$

$$=f_{n+1}\cdot(f_n+f_{n-1}-f_{n+1})+(-1)^{n+1}$$
$$=(-1)^{n+1}$$ （証了）

以上によりシンプソンの恒等式は証明され、必ず「１」の増減が生じると言える。

④しかし、これは面積増減の不思議が一般的に成り立つと言えただけであって、図形増減の不思議の数学的種明かしをしたことにはなっていない。

そこで図形増減の不思議を考えることに移る。

面積増減の不思議は，

長方形が、実は長方形になっていないことにある

実際、対角線にそった部分はピッタリとは合っていないのである。そこでは、単位面積分だけ、nによって、ちょっと重なり合っていたりごく細い隙間が開いていたりする。

これは対角線に相当する直線の勾配を計算してみると分かる、

f_{n-3}/f_{n-1}（3/8=0.375）、f_{n-2}/f_n（5/13=0.385）および
f_{n-1}/f_{n+1}（8/21=0.381）

となっている。これらの値は、とくにnが大きければほとんど違いがないので、ズレはちょっと見ただけでは見破れない。

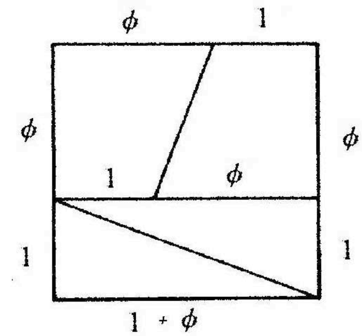
⑤「面積増減の不思議」の「数学解」はステップ④で明らかになり、納得はできた。しかし、数学的には正方形をどのように切り分ければ、正しく長方形に組み合わさるのかという数学的種明かしをしなければ、最初の常識が覆された不思議は解決されたことにはならない。

したがって、この「プロセス」はステップ⑥に続き、新たな『数学化プロセス』を始めなければならないということになる。

なお、ステップ⑤までの数式ならびに数学的証明を除く部分は、一種の「数学マジック」として多用されている。

⑥辺を収束値で分割する（証明が必要だが紙幅の関係で省略する）

面積増減の不思議は、正方形の辺の長さがフィボナッチ数列u_n（後述）ならば起こる現象で、正方形を切り分けて正しく長方形に組み合わさる唯一の方法は、次のような理由から右図のように辺を特定の比１：Φで内分する点で分割すれば良いといえる。



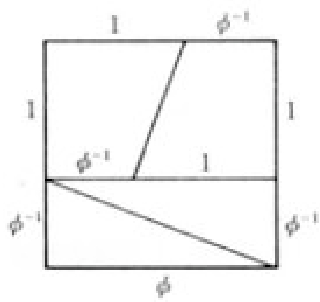
今、一辺を１：Φに内分したとして、Φで割ると下図左となる。この時、

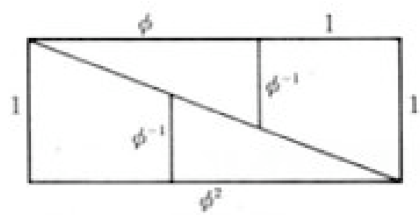
底辺　$1+1/\Phi = \Phi$

同じく下図右の底辺も　$1+\Phi = \Phi^2$ である。

正方形を切り分けて長方形に裁ち合わせ求積すると、面積はともに Φ^2 。

ここでΦは $(1+\sqrt{5})/2$ でこの分割を黄金分割、あるいは黄金比と呼ぶ。





このΦは、例題３）の各自が思い浮かべた同符号の２数（f_{n-1}，f_{n-2}）の和f_nから作った数列｛f_n｝の比f_{n-1}/f_{n-2} の収束値でもある（証明は略）。

各自が思い浮かべた同符号の２数から作られる数列は「リュカ数列L_n」と呼ばれる。

リュカ数列の中で、$f_1 = 1$，$f_2 = 1$から始まる数列

１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４・・・

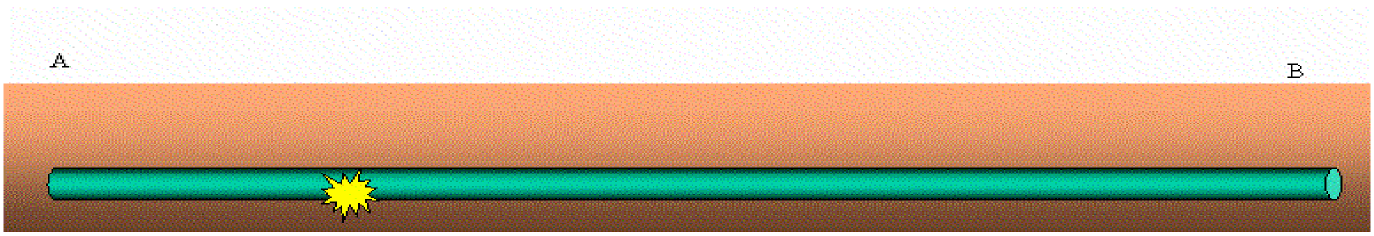
が、自然界のいたるところで見ることのできる「フィボナッチ数列u_n」である。

黄金比の現代的な使い方の一例

～水道（ガス）管の破損箇所を探索（サーチ）する～

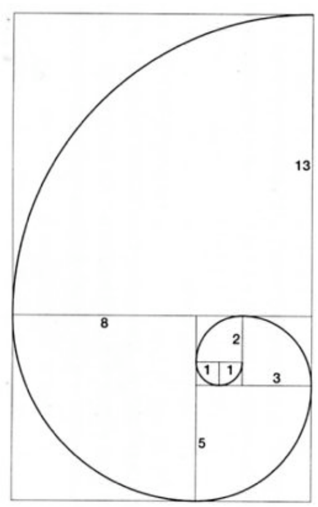
アルゴリズム（ａｌｇｏｒｉｔｈｍ）というのは算法と訳されますが，解法へ

の手順ということです。 黄金比はこのアルゴリズムの世界の中で，コンピュータを利用した探索（サーチ）の場面で重要な役割を果たします。
例えば，１本道の地下に埋設された水道（もしくはガス）管のどこかに穴が空いて水（もしくはガス）漏れ事故が起こった（近年、両方の事故報道があった），とします。そこは下図ＡＢ区間内にあることは分かっていますが，その何処なのかは分からない。そこで観測点Ｐの地面に好感度マイクを当てて水（もしくはガス）漏れの音を聞きながら，穴の場所を特定していきます。マイクは工夫がされていて，穴の場所がその地点のＡ側にあるのか，Ｂ側にあるのかが分かります。もしＡ側にあるなら，区間ＰＡで同様の測定をし，だんだんと区間を狭めていきます。図左のフイルムをクリックして現れる矢印をクリックすると、この探索（サーチ）



のプロセスを観ることができます。この観測点Ｐが区間ＡＢを黄金比に内分する点で、ここで測定し，次に水（もしくはガス）漏れのある側をさらに黄金比で内分し続け区間を狭めていく調査をすれば、最も速く穴の場所が特定できる。

例題２）の自然界に多く見受けられる渦巻き（スパイラル）を描くのに正方形をつぎつぎに拡張したステップは、グラフ用紙上にこのフィボナッチ数列を正方形という形で描いたもので、自然の複雑な造詣「渦巻き」（スパイラルカーブ）を簡単に描くことができた秘密は、このフイボナッチ数列にあった。



このような「問題解決プロセス」、「数学化プロセス」を私は次のようなスローガンで呼んでいる。

学び手の日常的対象に、動作や行動を知的に適用し、数学の論理に導き、

そうして獲得した数学の諸形式を再び具体的事象の解析に適用する

これを教師の教材構成の原則に終わらせてはならない、このような思考活動を学んだ者が行えるようにすることが目的で、ＰＩＳＡが話題になるはるか以前から、「プロ野球日本シリーズを数学する」とか「自販機のつり銭の入れ方」というような、「現実問題からスタート」して『数学活動サイクル』（ＰＩＳＡの『数学化プロセス』という呼称がでて来るまで私が使っていた呼び方）を辿る数学教育を実践していた私の講義を受けた受講生は次のようにレポートしている。

> 様々な根源から始まり，数学形式へ抽象し，そこからまた実践的な問題へ展開する。それが“過程を見せる”ということなのだと思う。さらにここでは，過程を見せるだけにとどまらず，応用へと進んでいった。一旦，抽象を経て，また具体的なものへと発展して行く。それが私にとっては新鮮だった。「理解する」ということを本当に考えたとき，抽象で終わってしまってはいけないと思う。抽象と具体を自由に行き来できることが，「理解する」ということではないかと思うからだ

と。

いかがでしょう。ここには人間の認識の歴史において、数学が人々のこころを揺さぶった驚きや喜びと同次元の体験がレポートされていると思います。この学生のレポートはつぎのホワイトヘッドと異口同音と言っては言い過ぎでしょうか。

> 次第に抽象的思考の領域に入り込んでゆく様子はまことに印象的、数学はその上で、具体的事実の分析という重要な役割を果たすために地上に戻ってくる。・・・ここに、具体的なものを攻略するための武器が極度に抽象的であるという、パラドックスがある　『科学と近代世界』1981

この引用したホワイトヘッドの言説は、私がマインド・マップで表したＰＩＳＡの『数学化プロセス』の言葉による表現となっていますが、これはまた古今東西の多くの数理科学者たち（ポアンカレ、ノイマン、岡潔、ケメニー、ポリアほか）が定式化を試みてきた「数学活動サイクル」を集約したものであり、ＰＩＳＡが２１世紀の国際的社会に必要な『生きるための知識と技能』のコンピテンシ

ー（能力）の一環として１５歳児までの教育にも提起した意義は大きい。

　日本の国や自治体がＰＩＳＡ問題の類題をつくり行う各級学力調査にこの視点は見えないが、このようなプロセスの習得と問題解決を子どもの科学教育で実現を目指している研究と実践の記録がある。驚くことに、『８歳までに経験しておきたい科学』*8）と謳い、１９７０年代から９版を重ねる。アメリカの科学教育の懐の深さを感じさせる一冊である。

　　　第12章重力のはたらき

　　　　科学概念

　　　　　　・重力はすべてのものを引っ張ります。

　　　　統合的な活動

　　　　　　算数の活動／造形表現の活動／遊び／創造的な身体表現／創造的な思考活動／食べ物を使った活動／園（校）外での学習活動

　　　　科学概念を多様に関連づける

　　　　　　概念を維持する／園（校）庭を改善する／概念を結びつける／家庭と地域の支援

一章の目次だけ紹介したが、他の章も同じスタイルで、習得させたい「科学概念」に対し、算数活動も含めた教科横断的な問題解決アプローチを学ばせ、その後、多様な問題解決にあたらせるスタイルを採っている。

５．21世紀の早い時期に「教育の基調の転換」を

　翻って『問題解決プロセス』なり『数学化プロセス』と関わって日本の教育なり教師たちの辿ってきた経緯を素描し重ねて課題を考えてみよう。

　日本の教師は、あらゆる教科の基本的な知識を学習させていく際、「問題把握->問題追究->問題解決」と学習プロセスを組むのを原則にしてきている。したがって、ＰＩＳＡのいう『問題解決プロセス』なり『数学化プロセス』は、日本の教室では実現済みとする声がある。しかし、この学習プロセス論は、例えば、１９９０年代文部省指導関連資料において「問題解決的な学習」、「問題解決的アプローチ」、「問題解決活動」と表現されているように、‘本当の問題解決学習’があってそれに似せた学習スタイルを採っているというニュアンスが強い。この本当にあたるものは、日本の戦後教育史の社会科教育で模索があった（現在も継続研究を続けている団体もある）『問題解決学習』を指す。教育方法学ではこれを「狭義

の」問題解決学習、対してこの学習プロセス論のようなものは「広義の」問題解決学習と呼び区別している*10)。ＰＩＳＡ調査のデータは、「日本の生徒たちが、最も困難を抱えている課題だった・・。数学と科学は１位と２位です。しかし、読解リテラシーについて（中略）、評価したり、熟考したり、推論したりといった幾つかの分野に関して、日本の生徒は苦手としているようです」*2）とＰＩＳＡ 2000 で報告されている通り、学習プロセス論の意図は、日本の教室で実現されていないことを示した。別の言い方をすれば、学習プロセス論は教師の指導上の教材構成の手だてに終わっていて、学ぶ者が何らかの現実問題に直面し、問題に対処し、解決するというリテラシー能力を育むことをめざしたＰＩＳＡのものとは似て非なるもの、と。

一方、『数学化プロセス』を重視するＰＩＳＡ数学(教育)観を見るにつけ、日本の数学（教育）観との違いを感じる。「数学」という言葉には、プロセスとしての一定の＜思考活動＞を意味することもあるし、この活動の結果としての＜理論＞を意味することもある。したがって、数学の学習指導というときこのどちらも重視しなければならない。しかるに日本では、プロセスを軽視し、結果に偏ってきた。しかも、理論（内容）をかなり恣意的に変質させながら、これを「基礎・基本」として権力的に押し付けてきた経緯がある。こうした積年の教育風土が、ＰＩＳＡ対策を講じなければならない状況にあたり、プロセスも見る教育課程の改革・転換の道を採らず、従来通りの結果で見る類題ドリルとテスト頻発で子ども・教師たちを「競い合せ」乗り切ろうとする愚作を採っている。

しかし、『問題解決プロセス』と『数学化プロセス』をめぐるこのような経緯を許してきたより根本的な原因として私が重視するのは、現場教師たちの経験の貴重な声が指導要領改定に反映することが軽視されているところに典型的に現れているのだが、学者でない現場教師は「与えられた教科書を教えていれば良い」としていた明治以降の日本の教育政策の底流にある「教育と学問は別」とする教育蔑視と同根の数学教育蔑視にあること。もうひとつ、やはり「教育と学問は別」としてきた政策の反映といえようが、「科学としての数学」の研究者が陥る「教育としての数学」の研究の軽視・蔑視と、現場教師たちとの軋轢、もっと厳しく言えば侮蔑である。これは日本の数学文化にとって最も悪影響を及ぼしていると考える。偉大な数学研究者が良き数学教育者とは限らない。非生産的な軽視・蔑視から脱し、現場教師たちと手を携えて、「数学教育」固有の内実を明らかにしたり、

数学教員養成を行って、日本の数学文化の創造に尽力してもらいたい。上記悪しき状況が「学校で習うことは役立たない」と嘯く社会の風潮と相俟って、「数学における興味・関心・楽しみ‥・・」を摘み取る営みを行っている学校数学ひいては指導要領「数学」の放置を許しているように思えてならない。そしてこの弊害を見事に浮き彫りにしたのがＰＩＳＡ調査結果であった。

先に「面積増減の不思議」の『数学化プロセス』を詳述したのは、その「教え＝学び」のプロセスにおいて教育数学と専門数学が補完しあえる可能性があることを示したかったことにある。

「はじめに現実問題ありき」から‘課題の本質’を数理で表現する(1)実験的・発見的推測の伴う抽象化・数学化が主題の数学の‘生い立ち’の相、

数学形式（数・文字・図式）から数学解に至る(2)演繹的展開が主の数学的論理の相、

数学解から現実問題を解釈（もしくは翻訳）し解決に至る（時にはさらなる数学的拡張に連なる）(3)数学具象化の相

という三相とその繰り返しにおいてである。

学び手が現実に直面する問題をこの三相のプロセスに則って、解決することにどんどん挑戦させよう。手持ちの知識・技能の理解が不十分でも知恵を総動員して挑戦させよう、その後、修正を加えるという体験をさせよう。このより現実的な仮説設定と修正をくり返し行う“学び”と“総合”の絶えざる営みこそ『問題解決プロセス』による思考の醸成になる。このプロセスにおいて教育数学と専門数学の相互補完が実現できてはじめてその学び手は『数学化プロセス』もわがものにできることになる。

こうした営為の端緒には、「学ぶ者にとってのリアリティ」ある教育的配慮が不可欠であることを縷々記してきたのが本稿の趣旨であった。

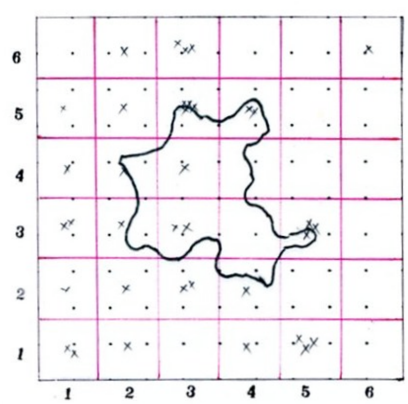
『生きるための知識と技能』の一環である『数学リテラシー』は、けっしてＰＩＳＡ問題の類題ドリルからは育たない。できるだけ早い時期に、断片知識を「競い合せ」る不毛なテスト主義に終止符を打ち、日本の数学文化を再構築する道を選ぶべきである。

参考文献・資料等（本文*）

0) OECD-PISA 『生きるための知識と技能』1～3、 『評価の枠組み』1～2 （ぎ

ょうせい）
1）OECD-DeSeCo　『キー・コンピテンシー　～　国際標準の学力をめざして～』（明石書店）
2）第１回ＣＯＥ公開研究会『ＯＥＣＤ加盟国の生徒の学習到達度』(03.１.27 東大大学院 シュライシャーOECD－PISAプログラム責任者を囲んで)
3）寺岡英男『「学力低下」を超えたリテラシーの新たな構築－PISA調査の提起などを受けて－』（福井の科学者No.100』）；マインドマップ風のまとめ方は山岸の責任です。
4）三根久編著『モンテカルロ法・シミュレーション』（コロナ社　現代応用数学講座ー４）
5）C.R.Rao『統計学とは何か～偶然を生かす～』（丸善）
6）ペトリほか『黄金分割－自然と数理と芸術と－』（共立出版）
7）アータレー『モナ・リザと数学』（化学同人）
8）ハーレンほか『８歳までに経験しておきたい科学』（北大路書房）
9）日本カリキュラム学会編『現代カリキュラム事典』(東洋館出版)
10）日本教育方法学会『戦後教育方法研究を問い直す』（明治図書）

例題1の略解１）
縮図で島が１０cm×１０cmの正方形にスッポリ納まることが分かった。この正方形を６×６の小正方形に分けて、縦横に１～６の番号をうち、大小二つのサイコロを転がして出目（大２、小４）を（縦２、横４）の交わる小正方形の真ん中に×印をうつ。以下、同様に３６回サイコロを転がし出目の３６点を「１０cm×



１０cm」正方形の中に×印をうつ。下右図は３６点の内７点が島の中にあった場合（比率７／36）の記録。この方法では、サイコロの出目によって島に入る点の数が若干異なるが許容誤差の範囲。もっと精度を上げたいならば８面体や１０面体サイコロを手に入れ、２つの８面体サイコロを使う場合１０cm×１０cmを８×８に分け６４回サイコロを振って同様に行えばいい。１０面体の場合は後述。

　島の面積Sと正方形の面積100平方cmの比　S/100 と点の比 7/36　は比例するとして、S/100 ＝ 7/36　よって　S ＝ 700/36 ＝約19　したがって 島の面積は　約19平方cmと概算できた。

ところで、直接測れない池の中の島の面積が約19平方cmあると概算できたがその真偽は心もとない。

　そこで別の方法でも試算を試みる。

略解２）重さ比べで求積する

　１辺が１０cmの正方形の厚紙と島の形の同じ厚紙を切り抜き、最小単位0.1gのポケットキッチン秤で重さを測ったところ、それぞれ3.2g、0.7gであった。島の面積Sと正方形の面積100平方cmの比 S/100 と切り紙の重さの比0.7/3.2 は比例するとして、S/100 ＝ 0.7/3.2 よって S= 70/3.2 ＝ 約22平方cm と求まる。二つの値には若干の差はあるが概算値としては後述１０面体サイコロの値を含め許容範囲。なお、秤がもっと小さな最小単位で測れれば厚紙でなくて良い。

略解３）碁石を敷き詰めて求積する

　領域Tの中にSという領域がある。

　面積Sが、面積Tの何%にあたるかを調べようという方法である。

すなわち

　　　　S / T

を求める。$T - S = S_0$ とする。

　これら領域に碁石を敷き詰める。Sには黒石をS_0には白石を敷く。

こうすると

　求める比 ＝S / T＝　黒石の数/碁石全部の数

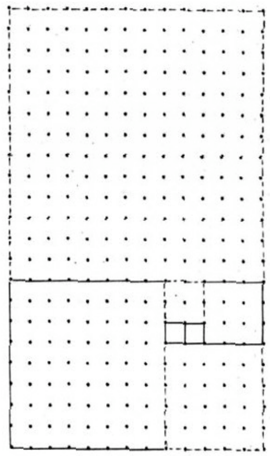
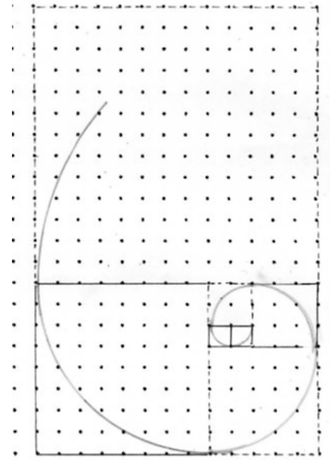
である。

　この場合の碁石の大きさでは正方形に敷き詰めた数約59個。ひょうたん池を敷

き詰めた碁石の数約13個だから　S / 100 =　13/59　S =　1300/59　=　22
碁石が円形で、Tをすき間なく敷き詰められないことが気になるならば、十分小さな碁石状のものを細いポンチでボール箱を打ち抜いて作ったものを使えばよい。

略解４）コンピュータ・シミュレーション
（P10図参照）
　解法を揃えるために解法３）の領域Tを「10cm×10cm」正方形にしたが、面積さえ求まるならば曲線で囲まれていても良い。この曲線で囲まれた面積をTとしてこの碁石の敷き詰めで全体の面積を求めることができ、解法1）のサイコロ投げ、もしくはコンピュータ・シミュレーションと併用すると万能の方法（モンテカルロ法）に繋がる。

例題2の略解）
　下の格子方眼の一目盛りを「１」としてつぎのstepで図示してみよう。
　step１）辺の長さが「１」の正方形を、並べて二つ描く。
　step２）上で描いた正方形二つの辺を足した辺の長さ「２」の正方形をstep１）で描いた２つの正方形の上に描く。
　step３）step 2)でできた正方形の横に、step１）とstep２）の辺を足した辺の長さ「３」の正方形を描く。
以下、同じようにして正方形の辺を足しながら新たな正方形を次々に描く（下図左）。
　ここで、それぞれの正方形の辺を半径として４分の１円を描き、順につなげて弧を描く（下図右）。これが自然の造詣「渦巻き、螺旋、スパイラル」カーブである。

例題3の略解）

正方形の面積	長方形の面積	面積の増減
８×８　＝　　６４	５×１３＝　　６５	＋１
１３×１３＝　１６９	８×２１＝　１６８	－１
２１×２１＝　４４１	１３×３４＝　４４２	＋１
３４×３４＝１１５６	２１×５５＝１１５５	－１
（以下略）	（単位省略）	

と、やはり面積の増減が起こり常識に反する。

例題4の略解）例にあげた（３，６）の場合、数列がどうなるかを計算して見せる。
数列　3，6，9，15，24，39，63，102，165，267，432，699，1131,・・・・・・・・・・・・・

比　6/３，9/6，15/9，24/15，39/24，63/39，102/63，165/102，267/165，432/267,・・・・・・

小数　2,1.5,1.666,1.6,1.63,1.625,1,619,1.6176,1.61818,1.61797，1.61805，1.61802,・・

グラフ　小数値とグラフから　１．６１８　に近づいて（収束して）いるといえそうだ。